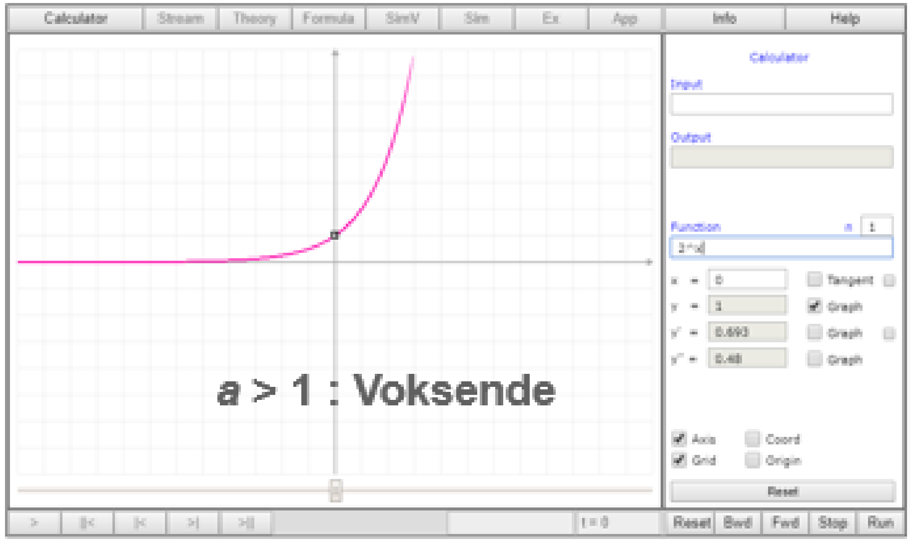
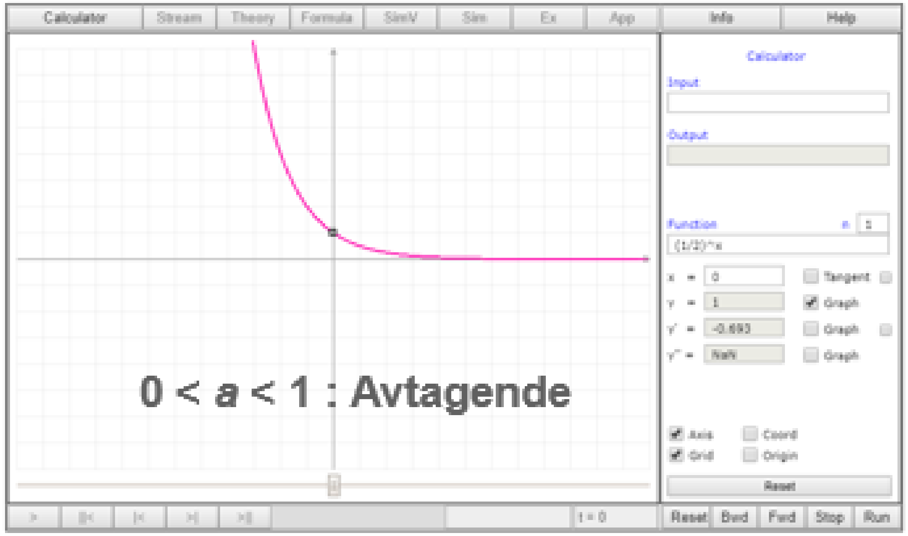
Eksponential- og logaritme-funksjoner

Hvis *a* er et positivt tall, er eksponentialfunksjonen $f(x) = a^x$

en kontinuerlig funksjon med definisjonsmengde $D_f = R$

og verdimengde $V_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$





Eksponential- og logaritme-funksjoner

$$\log_b a$$

Logaritmen med grunntall *b* til tallet *a*
er det tallet *x* som vi må opphøye *b* i for å få *a*.

$$a = b^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b a$$

Merk:

$$a = b^{\log_b a}$$

$$x = \log_b b^x$$

Eksponential- og logaritme-funksjoner

$$y = b^x$$

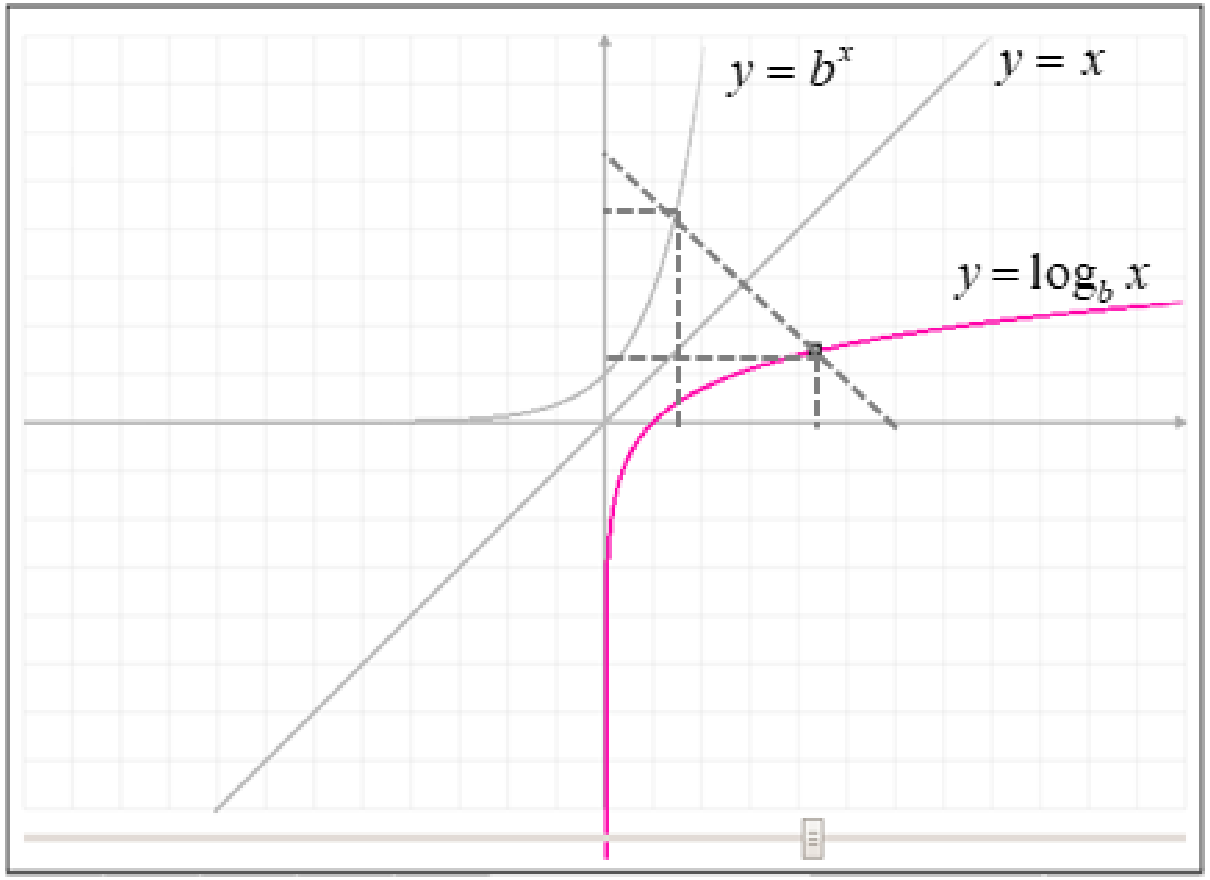
$$\Updownarrow$$

$$x = \log_b y$$

$$y = f(x) = b^x$$

$$x = f^{-1}(y) = \log_b y$$

$$y = f^{-1}(x) = \log_b x$$



Eksponential- og logaritme-funksjoner

Når grunntallet *b* = 10,
kalles logaritmen den briggske logaritme lg

$$\boxed{a = 10^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_{10} a = \lg a}$$

$$a = 10^{\lg a}$$

Når grunntallet *b* = *e*,
kalles logaritmen den naturlige logaritme ln

$$\boxed{a = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_e a = \ln a}$$

$$a = e^{\ln a}$$

Eksponential- og logaritme-funksjoner

$\log_b x^n \quad = \quad n \cdot \log_b x$	$\log_b x^n = \log_b \left(b^{\log_b x}\right)^n = \log_b b^{n \cdot \log_b x} = n \cdot \log_b x$
$\log_b (x \cdot y) \;=\; \log_b x + \log_b y$	$\log_b (x \cdot y) \;=\; \log_b \left(b^{\log_b x} \cdot b^{\log_b y}\right)$ $= \; \log_b b^{\log_b x + \log_b y} = \log_b x + \log_b y$
$\log_b \dfrac{x}{y} \quad = \quad \log_b x - \log_b y$	$\log_b \dfrac{x}{y} \;=\; \log_b \dfrac{b^{\log_b x}}{b^{\log_b y}}$ $= \; \log_b b^{\log_b x - \log_b y} = \log_b x - \log_b y$
$\log_b x \quad = \quad \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$	$\log_a x = \log_a \mathrm{b}^{\log_b x} = \log_b x \cdot \log_a \mathrm{b} \quad \Rightarrow$ $\log_b x \;=\; \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

Eksponential- og logaritme-funksjoner

En størrelse øker/avtar med p % pr tidsenhet (f.eks. pr år).
Størrelsen

$$k = 1 \pm \frac{p}{100}$$

kalles for vekstfaktoren (+ benyttes ved økning, - benyttes ved avtaking).

Hvis en størrelse i utgangspunktet er B_0, så vil størrelsen når vekstfaktoren er k, etter x tidsenheter ha vokst/avtatt til:

$$B(x) = B_0 \cdot k^x$$

Merk: Det kan enkelt vises at formelen gjelder for alle reelle tall x, ikke kun naturlige tall.

Eksponential- og logaritme-funksjoner

Derivasjon

$y = f(x) = e^x$	$y' = f'(x) = e^x$
$y = f(x) = \ln x$	$y' = f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$y = f(x) = a^x$	$y' = f'(x) = a^x \ln a$
$y = f(x) = \log_b x$	$y' = f'(x) = \dfrac{1}{x \ln b}$