

## Differential-likninger

1.orden, lineær DE	Løsning:
$\frac{dy}{dx} = f(x)$	$y(x) = \int f(x) dx$
$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$	$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$
$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$	$y(x) = e^{-u(x)} \int e^{u(x)} q(x) dx$ $= e^{-\int p(x) dx} \int e^{\int p(x) dx} q(x) dx$
$ay'' + by = 0 \quad a, b > 0$	$y(x) = A \cos kx + B \sin kx = C \cos(kx + \varphi) \quad k = \sqrt{\frac{b}{a}}$

## Differential-likninger

**Naturlig vekst:**  
Størrelser  $y$  hvor  
veksten  $y'$  er proporsjonal med  
størrelsens momentanverdi  $y$

$$y' = ky$$

**Logistisk vekst:**  
Størrelser  $y$  hvor  
veksten  $y'$  er proporsjonal med  
størrelsens momentanverdi  $y$ ,  
men korrigert med en faktor  
som avtar mot null  
når  $y$  nærmer seg en konstant  $N$ .

$$y' = ky \left[ 1 - \frac{y}{N} \right]$$

## Differential-likninger

Logistisk  
vekst

$$\frac{dy}{dx} = ky \left[ 1 - \frac{y}{N} \right]$$

$$N \frac{dy}{y[N-y]} = k dx$$

$$\int \frac{N dy}{y[N-y]} = k \int dx$$

$$\int \left[ \frac{1}{y} + \frac{1}{N-y} \right] dy = k \int dx$$

$$\ln|y| - \ln|N-y| = kx + C$$

$$\ln \left| \frac{y}{N-y} \right| = kx + C$$

$$e^{\ln \left| \frac{y}{N-y} \right|} = e^{kx+C} = e^{kx} e^C = Ke^{kx}$$

$$\left| \frac{y}{N-y} \right| = Ke^{kx}$$

$$\frac{y}{N-y} = Be^{kx}$$

$$y = \frac{N}{1 + Ae^{-kx}}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = N_0$$

$$N_0 = \frac{N}{1 + Ae^{-k \cdot 0}}$$

$$A = \frac{N - N_0}{N_0}$$

$$\frac{dy}{dx} = ky \left[ 1 - \frac{y}{N} \right]$$

↓

$$\underline{\underline{y = \frac{N}{1 + Ae^{-kx}}}}$$

$$A = \frac{N - N_0}{N_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = N$$