Kap 15 Lineær algebra - Oppgaver

01. Gitt følgende to matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

a) Bestem summen C av disse to matrisene.

b) Forklar hvorfor vi ikke kan finne et produkt mellom disse to matrisene.

02. Gitt følgende to matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Bestem matriseproduktet $C = AB$.

b) Bestem matriseproduktet $D = BA$.

c) Bruk resultatene fra a) og b) til å kommentere kommutivitet ved matrisemultiplikasjon.

03. Gitt følgende to matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Bestem matriseproduktet *C* = *AB*

b) Ved et matriseprodukt *C* = *AB*
hvor *A* er en *m* x *n* matrise og hvor *B* er en *p x q* matrise
vil *C* være en *m* x *q* matrise.
Kontroller at dette stemmer ved beregningen i a).

04. Bestem den transponerte av følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

05. Gitt et matriseprodukt: *C* = *AB*.
Element i rad *i* og kolonne *j* i C-matrisen er da (pr def av matrisemultiplikasjon) gitt ved:

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

Vis følgende: $(A \cdot B)^T = B^T A^T$

06. En matrise A sies å være invertibel hvis det finnes en matrise B slik at *AB* = *BA* = *I*.
I er her identitetsmatrisen, dvs den matrisen som har 1 på diagonalen og null ellers.
A og *B* sies å være inverse matriser av hverandre.
Det er klart at et krav til en invertibel matrise er at den må være kvadratisk (den må inneholde like mange rader og kolonner).

Vi har gitt følgende to matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vis at *A* og *B* er inverse matriser av hverandre.

07. Vi har følgende 2 x 2 matrise:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Determinanten til denne matrisen er gitt ved:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Bestem determinanten til følgende 2 x 2 matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

08. Vi har gitt følgende 3 x 3 matrise:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Determinanten til denne matrisen kan vi finne ved å utvikle etter en rad eller kolonne ved å benytte følgende fortegnsregel (merk at den resterende determinanten bak en av faktorene a_{ij} fremkommer ved å sløyfe rad *i* og kolonne *j*):

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Generelt vil element i rad *i* og kolonne *j* ha fortegn $(-1)^{i+j}$.

Eks:

Utvikler etter 1.rad:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

eller (utvikler etter 1.kolonne):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

eller (utvikler etter 2.kolonne):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

...

Bestem determinanten til følgende 3 x 3 matrise:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

09. Vi har gitt følgende likningssystem:

$$2x - 3y = 7$$
$$3x + 5y = 1$$

Likningssystemet skal løses på 6 ulike måter ved bruk av:

a) Innsettingmetoden
b) Addisjonsmetoden
c) Gauss-Jordan reduksjon
d) Invers matrise ved å benytte Gauss-Jordan reduksjon
e) Invers matrise ved å benytte formel for invers matrise for 2 x 2 matriser
e) Determinanter

10. Vi har git følgende likningssystem:

$$3y + 2x = z + 1$$
$$3x + 2z = 8 - 5y$$
$$3z - 1 = x - 2y$$

Likningssystemet skal løses på 3 ulike måter ved bruk av:

a) Gauss-Jordan reduksjon
b) Invers matrise
c) Determinanter

11. Vi har gitt et kvadrat ABCD i *xy*-planet hvor hjørnenes koordinater er gitt ved:
A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1).
I denne oppgaven skal translasjonsmatrise og rotasjonsmatrise benyttes til å bestemme kvadrat-hjørnenes koordinater etter følgende operasjoner:

I oppgave a) og b) er kvadrat-hjørnenes koordinater i utgangspunktet gitt ved:
A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1).

a) Rotasjon en vinkel lik 30 grader om z-aksen.
b) Rotasjon en vinkel lik 30 grader om z-aksen,
etterfulgt av en translasjon med lengde 1 langs den positive *x*-aksen.

I oppgave c) og d) er kvadrat-hjørnenes koordinater i utgangspunktet gitt ved:
A(1,0), B(2,0), C(2,1), D(1,1).

c) Rotasjon en vinkel lik 30 grader om en akse normalt på *xy*-planet gjennom punket A.
d) Rotasjon en vinkel lik 30 grader om *z*-aksen.