Kompleks tall - Løsningsforslag

01. Vi har gitt følgende komplekse tall:

$$z = 2 + i \cdot 2\sqrt{3}$$

a) Den kompleks konjugert til dette komplekse tallet:

$$\underline{\underline{z = 2 - i \cdot 2\sqrt{3}}}$$

b) Polar og eksponential from:

$$r = |z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \underline{4}$$

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{3}}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \underline{\underline{4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})}} \quad \text{Polar form}$$

$$z = re^{i\theta} = \underline{\underline{4e^{i\frac{\pi}{3}}}} \quad \text{Eksponential form}$$

Video

02. Beregn følgende komplekse tall:

a) $(3 + 2i) + (-7 - i) = 3 - 7 + 2i - i = \underline{\underline{-4 + i}}$

Video

b)

$$\begin{aligned} (2-3i)(4+2i) &= 2 \cdot 4 - 3i \cdot 4 + 2 \cdot 2i - 3i \cdot 2i \\ &= 8 - 12i + 4i - 6i^2 \\ &= 8 - 12i + 4i - 6 \cdot (-1) \\ &= 8 - 12i + 4i + 6 \\ &= \underline{\underline{14 - 8i}} \end{aligned}$$

Video

c)

$$\frac{3-2i}{-1+i}=\frac{(3-2i)\cdot(-1-i)}{(-1+i)\cdot(-1-i)}$$
$$=\frac{3\cdot(-1)-2i\cdot(-1)+3\cdot(-i)-2i\cdot(-i)}{(-1)^2-i^2}$$
$$=\frac{-3+2i-3i+2i^2}{1+1}$$
$$=\frac{-3+2i-3i-2}{2}$$
$$=\frac{-5-i}{2}$$
$$=\underline{\underline{-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i}}$$

Video

d)

$$\frac{5+5i}{3-4i}+\frac{20}{4+3i}=\frac{(5+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}+\frac{20\cdot(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}$$
$$=\frac{15+15i+20i+20i^2}{9-16i^2}+\frac{80-60i}{16-9i^2}$$
$$=\frac{15+15i+20i+20(-1)}{9-16i^2}+\frac{80-60i}{16-9i^2}$$
$$=\frac{-5+35i}{25}+\frac{80-60i}{25}$$
$$=\frac{(-5+35i)+(80-60i)}{25}$$
$$=\frac{75-25i}{25}$$
$$=\underline{\underline{3-i}}$$

Video

e)

$$\frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}=\frac{3(i^2)^{15}-(i^2)^9 i}{2i-1}$$
$$=\frac{3(-1)^{15}-(-1)^9 i}{2i-1}$$
$$=\frac{3(-1)-(-1)i}{2i-1}$$
$$=\frac{-3+i}{-1+2i}\qquad \text{Kunne beholdt nevner } 2i-1 \text{ og multiplisert med } (2i+1)$$
$$=\frac{(-3+i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}$$
$$=\frac{3-i+6i-2i^2}{(-1)^2-(2i)^2)}$$
$$=\frac{3-i+6i-2(-1)}{1-4(-1)}$$
$$=\frac{5+5i}{5}$$
$$=\underline{\underline{1+i}}$$

Video

03. To komplekse tall:

$$z_1=2+i$$
$$z_2=3-2i$$
$$3z_1-4z_2=3\cdot(2+i)-4\cdot(3-2i)$$
$$=6+3i-12+8i$$
$$=\underline{-6+11i}$$

$$\left|3z_1-4z_2\right|=\left|-6+11i\right|=\sqrt{(-6)^2+11^2}=\sqrt{36+121}=\underline{\underline{\sqrt{157}}}$$

Video

04. a) Uttrykk for sin og cos:

$$e^{i\theta} \quad = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\Downarrow$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\Downarrow$$

$$2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$$

$$2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}} \quad \wedge \quad \underline{\underline{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}}$$

Video

b) Beregning av sin opphøyd i tredje:

$$\sin^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3}{8i^3} = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3}{8i^2 i} = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3}{8(-1)i}$$

$$= -\frac{1}{8i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3$$

$$= -\frac{1}{8i}\left[(e^{i\theta})^3 - 3(e^{i\theta})^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}(e^{-i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^3\right]$$

$$= -\frac{1}{8i}\left[e^{3i\theta} - 3e^{-i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}\right]$$

$$= \frac{3}{4}\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} - \frac{1}{4}\frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta}}$$

Video

05. Gitt et komplekst tall *z*.

Forklaring av hva det vil si å multiplisere dette komplekse tallet med $e^{i\alpha}$.

$$z = re^{i\theta}$$

$$z \cdot e^{i\alpha} = re^{i\theta} \cdot e^{i\alpha} = \underline{re^{i(\theta+\alpha)}}$$

Herav ser vi at multiplikasjon av et komplekst tall *z* med $e^{i\alpha}$
vil si å rotere det komplekset tallet *z* en vinkel α.
$e^{i\alpha}$ virker altså som en rotasjonsoperator i det komplekse planet.

Video

06. Bevis av $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ &= \cos(\theta+2k\pi) + +i\sin(\theta+2k\pi) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \\ &= \underline{\underline{e^{i(\theta+2k\pi)}}} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \end{aligned}$$

Video

07. Tredje rot (og lokaliser grafisk) av det komplekse tallet: $z = -1 + i$.

$$z = x + iy = r\left[\cos\theta + i\sin\theta\right] = re^{i\theta} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$z = -1 + i \qquad r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{-1} = -1 \qquad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$z = -1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

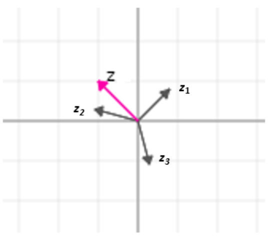
$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{3}} &= (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{1}{3}(\frac{3\pi}{4}+2k\pi)} \qquad k = 0,1,2 \\ &= \underline{\underline{2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{1}{3}(\frac{3\pi}{4}+2k\pi)}}} \qquad k = 0,1,2 \end{aligned}$$

$$k = 0: \quad z_1 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

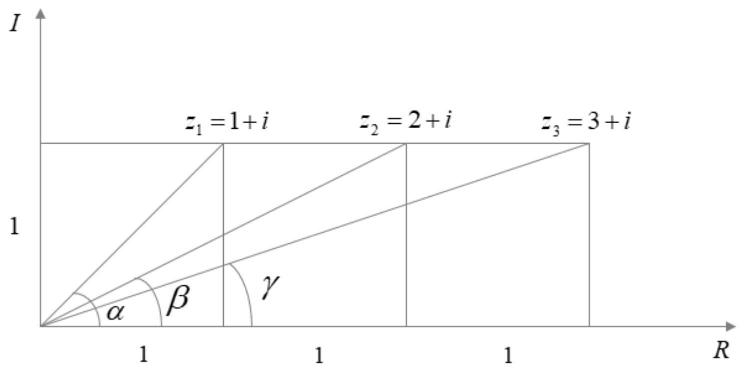
$$k = 1: \quad z_2 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

$$k = 2: \quad z_3 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{19\pi}{12}}$$

Video



08. Vi plasserer rektanglet med nedre venstre hjørne i origo i det komplekse planet og to sidekanter langs henholdsvis den reelle og den imaginære aksen.
På figuren vises at endepunktene av de tre linjestykkene fra origo er gitt ved henholdsvis:
$z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 + i$ og $z_3 = 1 + i$.



Vi multipliserer de tre komplekse tallene på to måter ved bruk av den rektangulære formen og den eksponentielle formen:

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 &= (1+i)\cdot(2+i)\cdot(3+i) \\
&= (2+2i+i+i^2)\cdot(3+i) \\
&= (2+2i+i-1)\cdot(3+i) \\
&= (1+3i)\cdot(3+i) \\
&= 3+9i+i+3i^2 \\
&= 3+9i+i-3 \\
&= \underline{10i}
\end{aligned}
$$

Dette viser at produktet av de tre komplekse tallene ligger i posisjon 10 på den imaginære aksen.

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 &= \sqrt{1^2+1^2}e^{i\alpha} \cdot \sqrt{1^2+2^2}e^{i\beta} \cdot \sqrt{1^2+3^2}e^{i\gamma} \\
&= \sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} \\
&= \underline{10e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}}
\end{aligned}
$$

Siden produktet av de tre komplekse tallene ligger på den positive imaginære aksen, må vinkelsummen $\alpha+\beta+\gamma$ være lik $\pi/2$ (= 90 grader).

Video