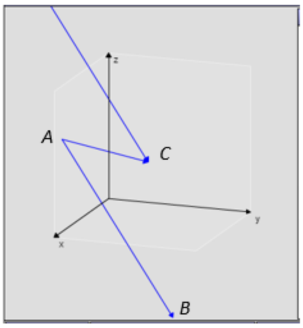
Vektorer - Løsningsforslag

01. $A(1,-2,3),\ B(2,4,-5),\ C(0,2,2)\ og\ D(x,y,z)$



a) Skalarprodukt og vektorprodukt:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=[1,6,-8]\cdot[-1,4,-1]=-1+24+8\underline{\underline{=31}}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=[1,6,-8]\times[-1,4,-1]$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 6 & -8\\ -1 & 4 & -1\end{vmatrix}$$

$$=[6\cdot(-1)-(-8)\cdot4,(-8)\cdot(-1)-1\cdot(-1),1\cdot4-6\cdot(-1)]$$

$$=\underline{\underline{[26,9,10]}}$$

b) Vinkel $\angle BAC$ og arealet av ΔABC.
Arealet av er halvparten av arealet av det parallellogrammet
som de to vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ utspenner.

$$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{31}{\sqrt{101}\cdot\sqrt{18}}=0,727$$

$$\underline{\underline{\angle BAC=43,4^\circ}}$$

$$\text{Arealet av }\Delta ABC=A=\frac{1}{2}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\right|=\frac{1}{2}\|[26,9,10]\|=\frac{1}{2}\sqrt{26^2+9^2+10^2}$$

$$\underline{\underline{A=\frac{\sqrt{857}}{2}\approx14,6}}$$

c) Punktene A, B, C og D er hjørnene i et trapes hvor $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AB}$.
Koordinatene til punktet *D* er da gitt ved:

$$\overrightarrow{DC} = [-x,\ 2-y,\ 2-z] = 3\overrightarrow{AB} = [3,\ 18,\ -24]$$

1) $\quad -x = 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{x = -3}$

2) $\quad 2 - y = 18 \quad \Rightarrow \quad \underline{y = -16}$

3) $\quad 2 - z = -24 \quad \Rightarrow \quad \underline{z = 26}$

$$\underline{\underline{Koordinatene\ til\ \ punkt\ \ D\ \ er\ \ da : (-3,\ -16,\ 26)}}$$

d) Vi kaller avstanden mellom de parallelle sidekantene $\overrightarrow{DC}$ og $\overrightarrow{AB}$ for *h*.

Kaller avstanden mellom $\overrightarrow{DC}$ og $\overrightarrow{AB}$ for h

$$Arealet\ av\ \Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot h$$

$$\frac{\sqrt{857}}{2} = \frac{\sqrt{101} \cdot h}{2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\sqrt{857}}{\sqrt{101}}$$

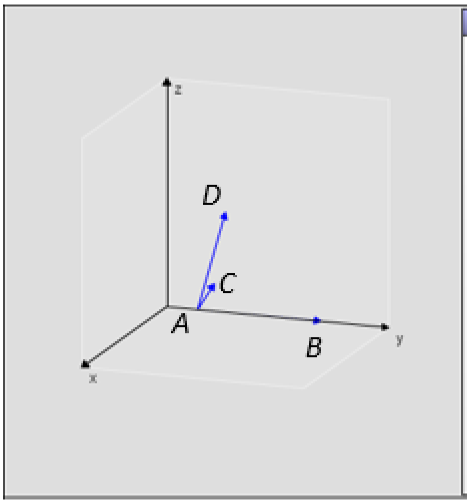
$$\underline{\underline{h \approx 2{,}9}}$$

e) Beregning av arealet av trapeset.
Siden trapeset består av de to trekantene $\Delta ABC\ og\ \Delta ACD$,
må ΔACD være 3 ganger så stor som ΔABC fordi grunnlinjen *DC* i ΔACD
er 3 ganger så lang som grunnlinjen *AB* i ΔABC

Arealet av trapeset er derfor: $\underline{\underline{A_T = 4 \cdot \frac{\sqrt{857}}{2} \approx 58{,}5}}$

Video

02. $A(0,1,0)$, $B(0,5,0)$, $C(4,3,2)$ og $D(3,3,4)$



a) Vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{CD}$ på koordinatform:

$$\overrightarrow{AB} = [0-0,\ 5-1,\ 0-0] = \underline{\underline{[0,4,0]}}$$

$$\overrightarrow{CD} = [3-4, 3-3, 4-2] = \underline{\underline{[-1,\ 0,\ 2]}}$$

b) Arealet av ΔABC.

De to vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ utspenner et parallellogram.

Arealet av dette parallellogrammet får vi ved å ta lengden av kryssproduktet av de to vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

Arealet av trekanten ΔABC får vi ta ved å ta halvparten av arealet av parallellogrammet.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [0,\ 4,\ 0] \times [4,\ 2,\ 2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = [4 \cdot 2 - 0 \cdot 2, 0 \cdot 4 - 0 \cdot 2, 0 \cdot 2 - 4 \cdot 4] = \underline{[8,0,-16]}$$

Arealet av parallellogrammet utspent av $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$:

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \left|[8,0,-16]\right| = \sqrt{8^2 + 0^2 (-16)^2} = \sqrt{320} = \underline{8\sqrt{5}}$$

$$\text{Arealet av } \Delta ABC = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} 8\sqrt{5} = \underline{\underline{4\sqrt{5}}}$$

c) Volumet av pyramiden *ABCD* :

Volumet av parallellepipedet utspent av de tre vektorene $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AD}$

får vi ved å ta absoluttverdien av skalarproduktet de to vektorene $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AD}$.

Volumet av pyramiden *ABCD* vil da være 1/6 av volumet til dette parallellepipedet.

$$
\begin{aligned}
V = \frac{1}{6}\left|\left(\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD}\right)\right| &= \frac{1}{6}\left|[8,\ 0,\ -16] \cdot [3,\ 2,\ 4]\right| \\
&= \frac{1}{6}\left|8 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + (-16) \cdot 4\right| \\
&= \frac{1}{6}\left|24 - 64\right| \\
&= \frac{1}{6}\left|-40\right| = \frac{1}{6} \cdot 40 = \underline{\underline{\frac{20}{3}}}
\end{aligned}
$$

Video

03. a) Vektoren $\overrightarrow{AB}$ på komponentform:

$$\overrightarrow{AB} = [-2-2, 3-1, 0-5] = \underline{\underline{[-4, 2, -5]}}$$

b) Lengden av vektoren $\overrightarrow{AB}$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{16+4+25} = \underline{\underline{\sqrt{45}}}$$

Video

04. a) Sum:

$$\vec{u} + \vec{v} = [2,1,1] + [-4,3,1] = [2+(-4), 1+3, 1+1] = \underline{\underline{[-2, 4, 2]}}$$

b) Skalarprodukt:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = [2,1,1] \cdot [-4,3,1] = 2\cdot(-4) + 1\cdot 3 + 1\cdot 1 = -8+3+1 = \underline{\underline{-4}}$$

c) Kryssprodukt:

$$\vec{u} \times \vec{v} = [2,1,1] \times [-4,3,1] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= [1\cdot 1 - 1\cdot 3, 1\cdot(-4) - 2\cdot 1, 2\cdot 3 - 1\cdot(-4)] = \underline{\underline{[-2, -6, 10]}}$$

d) Vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{2^2+1^2+1^2} \cdot \sqrt{(-4)+3^2+1^2}}$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{26}} = \frac{-4}{\sqrt{6\cdot 26}} = \frac{-4}{\sqrt{2\cdot 3\cdot 2\cdot 13}} = \frac{-4}{2\sqrt{39}} = \underline{-\frac{2}{\sqrt{39}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{39}}\right) = \underline{\underline{1.8968}} \quad (=108.7^0)$$

Video