Derivasjon - Løsningsforslag

01. Derivasjon:

a) $y = x^3 \quad \Rightarrow \quad y' = \underline{\underline{3x^2}}$

b) $y = (2x)^4 \Rightarrow y' = 4\cdot(2x)^3\cdot 2 = 8\cdot(2x)^3 = 8\cdot 2^3\cdot x^3 = \underline{\underline{64x^3}}$

c) $y = (2x^4 - 2x + 1)^2 \Rightarrow y' = 2(2x^4 - 2x + 1)^1(8x^3 - 2) = \underline{\underline{4(2x^4 - 2x + 1)(8x^3 - 2)}}$

d) $y = \dfrac{x-2}{x^2} \Rightarrow y' = \dfrac{1\cdot x^2 - (x-2)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{x(4-x)}{x^4} = \underline{\underline{\dfrac{4-x}{x^3}}}$

e) $y = \sin(3x) \Rightarrow y' = \cos(3x)\cdot 3 = \underline{\underline{3\cos(3x)}}$

f) $y = \cos^4(x^2) \Rightarrow y' = 4\cos^3(x^2)(-\sin(x^2))\cdot 2x = \underline{\underline{-8x\cos^3(x^2)\sin(x^2)}}$

g) $y = e^{3x} \Rightarrow y' = e^{3x}\cdot 3 = \underline{\underline{3e^{3x}}}$

h)

$$y = x^3 + 2\cos(4x^2+3) - 3e^{\sin(x)}$$

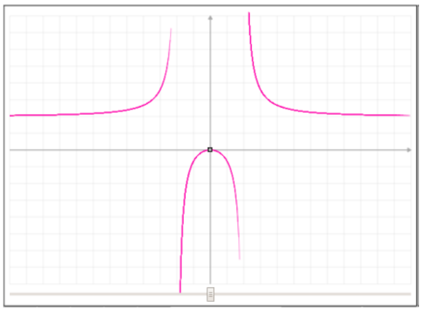
$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 2\sin(4x^2+3)\cdot 8x - 3e^{\sin(x)}\cdot\cos(x) \\ &= \underline{\underline{3x^2 - 16x\sin(4x^2+3) - 3e^{\sin(x)}\cos(x)}} \end{aligned}$$

Video

02. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 4}$

a) Grafen til f:



b) Nullpunktene er gitt ved f(x) = 0. Her er funksjonen gitt ved en brøk.
En brøk er lik null når telleren er lik null.

$$2x^2 = 0$$
$$\underline{\underline{x = 0}}$$

c) Vertikal asymptote finnes ved å sette nevneren lik null:

$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$\underline{\underline{x = \pm 2}}$$

Funksjonen har ingen skrå asymptote siden teller og nevner har samme grad (her 2).
For at funksjonen skal ha en skrå-asymptote,
må teller være av en grad høyere enn nevner.

Horisontal asymptote finner vi (når teller og nevner har samme grad)
ved å bestemme grensen for funksjonsuttrykket når x går mot uendlig.
Dette gjøres ved dele teller teller og nevner med høyeste grad av x (her 2)

$$\underline{\underline{HA}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1 - \frac{4}{x^2}} = \underline{\underline{2}}$$

d) Koordinater til ekstremalpunkter:

$$f'(x) = \frac{4x\left(x^2 - 4\right) - 2x^2 \cdot 2x}{\left(x^2 - 4\right)^2} = \frac{4x^3 - 16x - 4x^3}{\left(x^2 - 4\right)^2} = \frac{-16x}{\left(x^2 - 4\right)^2}$$

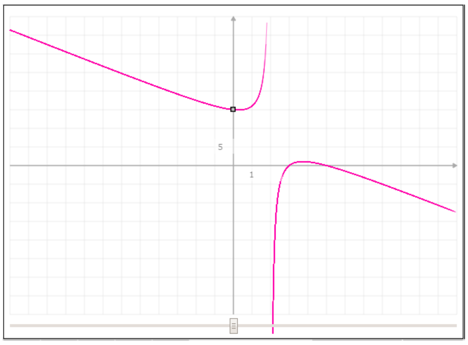
$f'(x) = 0$ *når* $x = 0$. *Innsatt i uttrykket for* $f(x)$ *får vi:*

$$f(0) = \frac{0}{-4} = 0 \quad \underline{\underline{\textit{Koordinatene til ekstremalpunktet er } (0,\ 0)}}$$

Video

03. $$f(x) = \frac{-2x^2 + 16x - 30}{x - 2}$$

a) Grafen til *f*:



b) Nullpunktene er gitt ved f(x) = 0.
Her er funksjonen gitt ved en brøk.
En brøk er lik null når telleren er lik null.

$$-2x^2 + 16x - 30 = 0$$

Benytter 2.gradsformelen og får :

$$\underline{\underline{x = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}}}$$

c) Vertikal asymptote finnes ved å sette nevneren lik null:

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

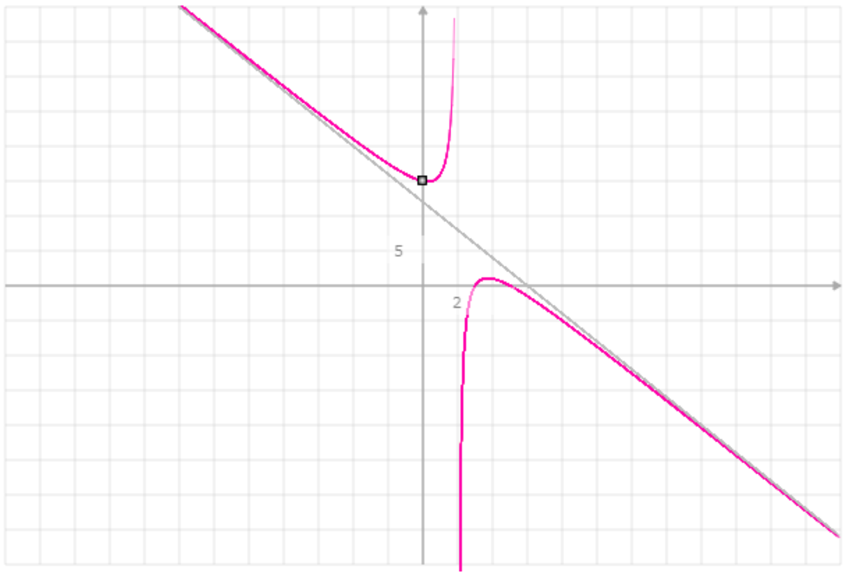
Funksjonen har ingen horisontal asymptote
siden teller og nevner ikke har samme grad.

Skrå-asymptote finner vi (når teller har en grad høyere enn nevner)
ved å foreta en polynomdivisjon.

$$(-2x^2 + 16x - 30) : (x - 2) = -2x + 12 - \frac{6}{x - 2}$$

$$\begin{array}{l} -2x^2 + 4x \\ \qquad 12x - 30 \\ \qquad 12x - 24 \\ \qquad\qquad -6 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 16x - 30}{x - 2} = -2x + 12 - \frac{6}{x - 2} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} \underline{\underline{-2x + 12}}$$



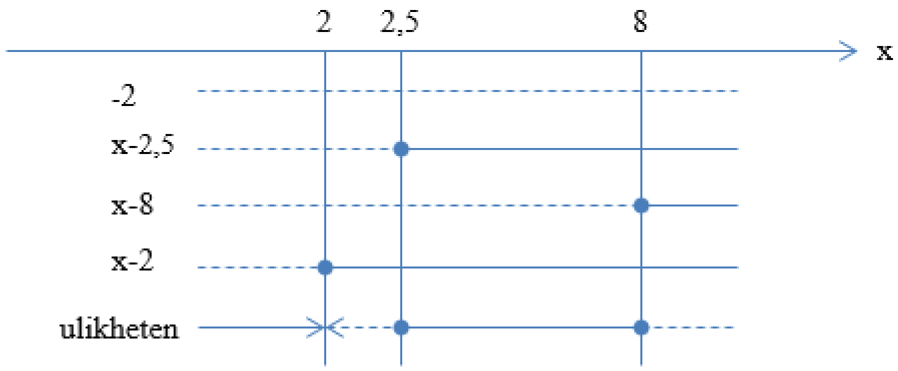
5
2

d) Ulikhet:

$$\frac{-2x^2+16x-30}{x-2} \le -5$$

$$\frac{-2x^2+16x-30}{x-2}+5 \le 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-2x^2+16x-30+5(x-2)}{x-2} \le 0$$

$$\frac{-2x^2+21x+40}{x-2} \le 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\frac{-2(x-2,5)(x-8)}{x-2} \le 0}$$



Svar:

$$\underline{\underline{2 < x \le 2,5 \ eller \ x \ge 8}}$$

e) Derivasjon:

$$f'(x) = \frac{(-4x+16)(x-2)-\left(-2x^2+16x-30\right)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{-4x^2+8x+16x-32+2x^2-16x+30}{(x-2)^2} = \underline{\underline{\frac{-2x^2+8x-2}{(x-2)^2}}}$$

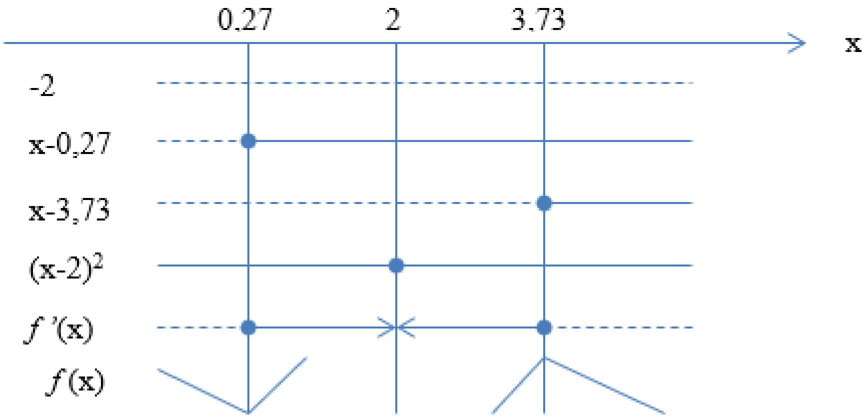
f) Koordinater til eventuelle topp- og bunnpunkter:

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 8x - 2}{(x-2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x^2 + 8x - 2 = 0$$

$$x = \begin{cases} 2 - \sqrt{3} \approx \underline{0,27} \quad \Rightarrow \quad som\ gir\ \ f\,(0,268) = \underline{y = 14,93} \\ 2 + \sqrt{3} \approx \underline{3,73} \quad \Rightarrow \quad som\ gir\ \ f\,(3,732) = \underline{y = 1,07} \end{cases}$$

Faktoriserer f'(x) og tegner fortegnsskjema for å avgjøre topp-/bunn-punkt:

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 8x - 2}{(x-2)^2} = \frac{-2(x - 0,27)(x - 3,73)}{(x-2)^2}$$



Bunnpunkt: $\underline{\underline{(0.27,\, 14.93)}}$

Toppunkt: $\underline{\underline{(3.73,\, 1.07)}}$

Video

04. $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x}$

a) Nullpunkter:

$f(x)=0$

$\dfrac{x^2-5x+4}{x}=0$

$x^2-5x+4=0 \quad x\neq 0$

ABC-formel på kalkulator gir:

$\mathrm{x}_1=1\ og\ x_2=4$

$\underline{\underline{\text{Nullpunkt når } x=1\ og\ x=4}}$

b) Asymptoter:

f har vertikal asymptote for $\underline{\underline{x=0}}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x-4}{x}=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^2-5x-4\right)\cdot\frac{1}{x}}{x\cdot\frac{1}{x}}=$

$\lim\limits_{x\to\infty}x-5-\dfrac{4}{x}$

$f\to y=x-5$ når $x\to\infty$

$\underline{\underline{f \text{ har en skrå asymptote } y=x-5}}$

c) f'(x):

$f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x}=x-5+4x^{-1}$

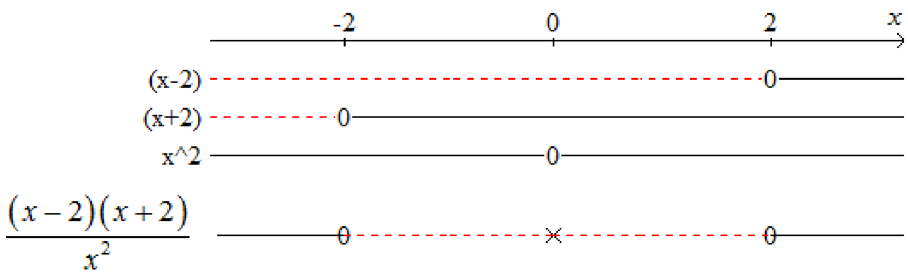
$f'(x)=1-4x^{-2}$

$f'(x)=1-\dfrac{4}{x^2}$

$\underline{\underline{f'(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2}}}$

d) Eventuelle topp- og bunn-punkter:

$$f\,'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$



$$f(-2) = \frac{(-2)^2 - 5(-2) + 4}{(-2)} = -9$$

$$f(2) = \frac{2^2 - 5 \cdot 2 + 4}{2} = -1$$

Toppunkt: $(-2, -9)$

Bunnpunkt: $(2, -1)$

e) Likningen for tangenten i punktet (1,*f*(1))

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

$$a = f\,'(1) = \frac{1^2 - 4}{1^2} = -3$$

$$f(1) = \frac{1^2 - 5 \cdot 1 + 4}{1} = 0$$

$$y - 0 = -3(x - 1)$$

$$y = -3x + 3$$

Video