Integrasjon - Løsningsforslag

01. Integrasjon:

a) $\int x^3 dx = \underline{\underline{\frac{1}{4}x^4 + C}}$

Video

b) $\int (2x)^4 dx = 16\int x^4 dx = 16 \cdot \frac{1}{5}x^5 + C = \underline{\underline{\frac{16}{5}x^5 + C}}$

Video

c) $\int \sin(3x) dx = \underline{\underline{-\frac{1}{3}\cos(3x) + C}}$

Eller ved bruk av substitusjon:

$$u = 3x \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 3 \quad \Rightarrow \quad du = 3dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{3}du$$

$$\int \sin(3x) dx = \int \sin(u)\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int \sin(u) du = -\frac{1}{3}\cos(u) + C = \underline{\underline{-\frac{1}{3}\cos(3x) + C}}$$

Video

d) $\int e^{3x} dx = \underline{\underline{\frac{1}{3}e^{3x} + C}}$

Eller ved bruk av substitusjon:

$$u = 3x \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 3 \quad \Rightarrow \quad du = 3dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{3}du$$

$$\int e^{3x} dx = \int e^u \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + C = \underline{\underline{\frac{1}{3}e^{3x} + C}}$$

Video

e) $\int 2xe^{x^2+1}dx = \underline{\underline{e^{x^2+1}+C}}$

Eller ved bruk av substitusjon:

$$u = x^2+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2xdx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2x}du$$

$$\int 2xe^{x^2+1}dx = \int 2xe^{u}\frac{1}{2x}du = \int e^{u}du = e^{u}+C = \underline{\underline{e^{x^2+1}+C}}$$

Video

f) $\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \int x(x^2+1)^{-2}dx = -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1}+C = \underline{\underline{-\frac{1}{2(x^2+1)}+C}}$

Eller ved bruk av substitusjon:

$$u = x^2+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2xdx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2x}du$$

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{x}{u^2}\frac{1}{2x}du$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2}du = \frac{1}{2}\int u^{-2}du = -\frac{1}{2}u^{-1}+C = -\frac{1}{2u}+C = \underline{\underline{-\frac{1}{2(x^2+1)}+C}}$$

Video

g) $$\int \frac{\cos x}{\sin x+3}dx = \ln|\sin x+3|+C = \underline{\underline{\ln(\sin x+3)+C}}$$

Eller ved bruk av substitusjon:

$$u = \sin x + 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \cos x \quad \Rightarrow \quad du = \cos x dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{\cos x}du$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x+3}dx = \int \frac{\cos x}{u}\frac{1}{\cos x}du$$

$$= \int \frac{1}{u}du = \ln|u|+C = \ln|\sin x+3|+C = \underline{\underline{\ln(\sin x+3)+C}}$$

Video

h) Benytter delvis integrasjon:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

I denne oppgaven får vi følgende:

$$\int 2xe^x dx$$

$$u = 2x \qquad dv = e^x dx$$

$$du = 2dx \qquad v = e^x$$

$$\int 2xe^x dx = 2xe^x - \int 2e^x dx = 2xe^x - 2e^x + C = \underline{\underline{(2x-2)e^x + C}}$$

Video

i) Benytter delvis integrasjon:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

I denne oppgaven får vi følgende:

$$\int (2x+1)\sin x\,dx$$

$$u = 2x+1 \qquad dv = \sin x\,dx$$

$$du = 2dx \qquad v = -\cos x$$

$$\begin{aligned}\int (2x+1)\sin x\,dx &= (2x+1)(-\cos x) - \int 2(-\cos x)\,dx \\ &= -(2x+1)\cos x + \int 2\cos x\,dx \\ &= \underline{\underline{-(2x+1)\cos x + 2\sin x + C}}\end{aligned}$$

Video

j) Benytter delvis integrasjon:

Formelen for delvis integrasjon:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

I denne oppgaven får vi følgende:

$$\int x\cos(3x)\,dx$$

$$u = x \qquad dv = \cos(3x)\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{1}{3}\sin(3x)$$

$$\begin{aligned}\int x\cos(3x)\,dx &= \frac{1}{3}x\sin(3x) - \frac{1}{3}\int \sin(3x)\,dx \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{3}x\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C}}\end{aligned}$$

Video

02. Bestemt integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (3e^{4x} + 8\cos(4x))dx = \left[\frac{3}{4}e^{4x} + 2\sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left[\frac{3}{4}e^{4\cdot\frac{\pi}{4}} + 2\sin(4\cdot\frac{\pi}{4})\right] - \left[\frac{3}{4}e^{4\cdot 0} + 2\sin(4\cdot 0)\right]$$

$$= \left[\frac{3}{4}e^{\pi} + 2\sin(\pi)\right] - \left[\frac{3}{4}e^{0} + 2\sin(0)\right]$$

$$= \left[\frac{3}{4}e^{\pi} + 2\cdot 0\right] - \left[\frac{3}{4}e^{0} + 2\cdot 0\right]$$

$$= \left[\frac{3}{4}e^{\pi} + 0\right] - \left[\frac{3}{4}\cdot 1 + 0\right]$$

$$= \frac{3}{4}e^{\pi} - \frac{3}{4}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{4}\left[e^{\pi} - 1\right]}}$$

Video

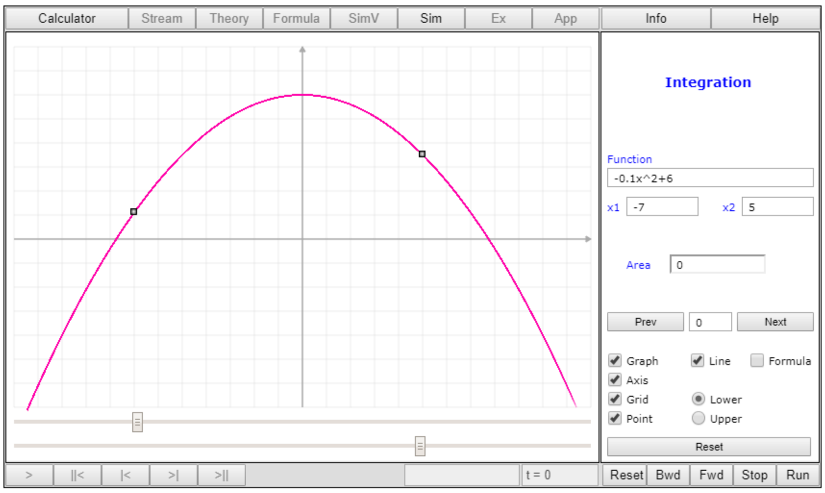
03. Areal:

$$\int_{-7}^{5} (-0.1x^2 + 6)dx = \left[-\frac{1}{30}x^3 + 6x\right]_{-7}^{5}$$

$$= \left[-\frac{1}{30}\cdot 5^3 + 6\cdot 5\right] - \left[-\frac{1}{30}\cdot(-7)^3 + 6\cdot(-7)\right]$$

$$= \underline{\underline{72 - \frac{468}{30}}} \approx 56.4$$

SimReal-simulering av dette arealet (klikk på bildet).



Video