Eksponential- og logaritme-funksjoner - Løsningsforslag

01. Beregninger:

a) $\ln e = \underline{\underline{1}}$ 1 er det tallet vi må oppøye e i for å få e

b) $\ln 1 = \underline{\underline{0}}$ 0 er det tallet vi må oppøye e i for å få 1

c) $\ln e^2 = 2\ln e = 2 \cdot 1 = \underline{\underline{2}}$

d) $\lg 1 = \underline{\underline{0}}$ 0 er det tallet vi må oppøye 10 i for å få 1

e) $\lg 10 = \underline{\underline{1}}$ 1 er det tallet vi må oppøye 10 i for å få 10

f) $\lg 100 = \lg 10^2 = 2 \cdot \lg 10 = 2 \cdot 1 = \underline{\underline{2}}$

g) $e^{\ln 2} = \underline{\underline{2}}$ 'e' og $\ln$ er inverse funksjoner og kan 'strykes mot hverandre'

h) $e^{\ln\frac{1}{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$ 'e' og $\ln$ er inverse funksjoner og kan 'strykes mot hverandre'

i) $\dfrac{1}{e^{\ln 4}} = \underline{\underline{\dfrac{1}{4}}}$ 'e' og $\ln$ er inverse funksjoner og kan 'strykes mot hverandre'

j) $10^{\lg 3} = 3$ '10' og $\ln$ er inverse funksjoner og kan 'strykes mot hverandre'

k) $e^{-\ln 4} = \dfrac{1}{e^{\ln 4}} = \underline{\underline{\dfrac{1}{4}}}$

l) $10^{-\lg 8} = \dfrac{1}{10^{\lg 8}} = \underline{\underline{\dfrac{1}{8}}}$

m)

$$\log_{27} 81 = \log_{27} 3^4 = 4 \cdot \log_{27} 3 = 4 \cdot \log_{27} 27^{\frac{1}{3}} = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_{27} 27 = \frac{4}{3} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

eller:

$$\log_{27} 81 = \log_{27} 27^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \cdot \log_{27} 27 = \frac{4}{3} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

Video

Link til kalkulator

02. Likninger:

a)

$$10^x = 3$$
$$\lg 10^x = \lg 3$$
$$x \lg 10 = \lg 3$$
$$x \cdot 1 = \lg 3$$
$$x = \underline{\underline{\lg 3}}$$

b)

$$2^x = 4$$
$$2^x = 2^2$$
$$x = \underline{\underline{2}}$$

eller:

$$2^x = 4$$
$$\ln 2^x = \ln 4$$
$$x \ln 2 = \ln 4$$
$$x = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \frac{\ln 2^2}{\ln 2} = \frac{2 \cdot \ln 2}{\ln 2} = \underline{\underline{2}}$$

Video

Link til kalkulator

03. Likning:

a)

$$\ln\tfrac{1}{2} + \ln 4x = 2\ln 8$$

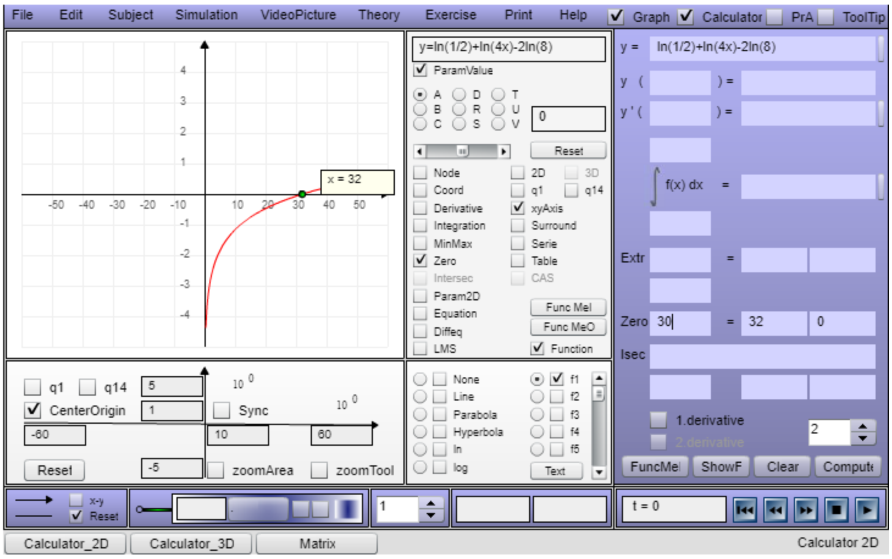
$$\ln 1 - \ln 2 + \ln 4 + \ln x = 2\ln 2^3$$

$$\ln 1 - \ln 2 + \ln 2^2 + \ln x = 2\ln 2^3$$

$$0 - \ln 2 + 2\ln 2 + \ln x = 6\ln 2$$

$$\ln x = 6\ln 2 + \ln 2 - 2\ln 2 = 5\ln 2 = \ln 2^5$$

$$\underline{\underline{x = 2^5 = 32}}$$



Video

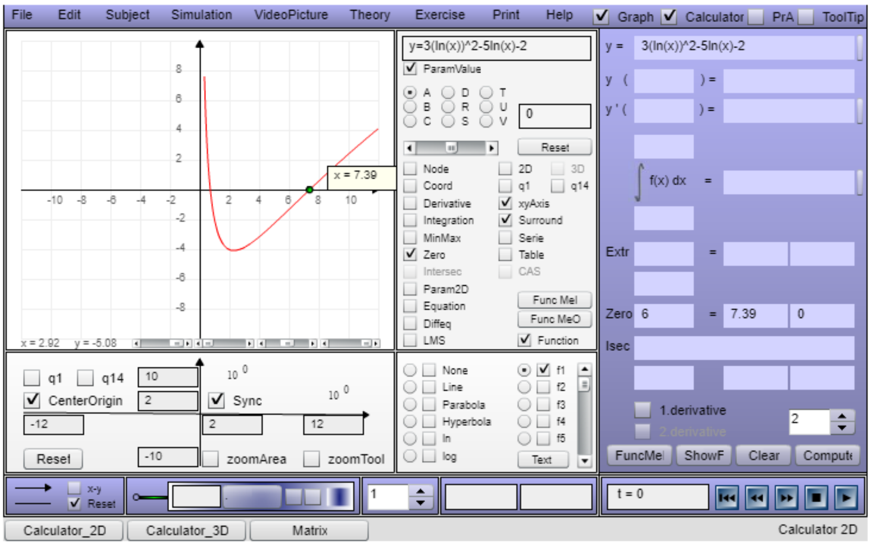
b)

$$3(\ln x)^2 - 5\ln x - 2 = 0$$

Dette er en 2.-grads likning med lnx som den ukjente

$$\ln x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 3\cdot(-2)}}{2\cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 9}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

$$\ln x = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{3} \end{cases} \quad som\ gir\ at\ x = \underline{\underline{\begin{cases} e^2 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}} \end{cases}}}$$



Video

c)

$$\ln x^2 + \ln x - 2 = 0$$

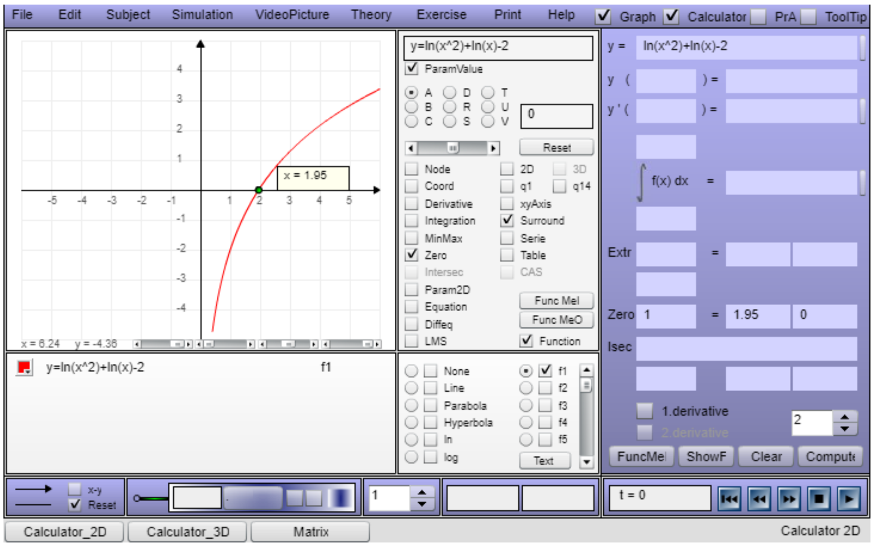
$$2\ln x + \ln x = 2$$

$$3\ln x = 2$$

$$\ln x = \frac{2}{3}$$

$$e^{\ln x} = e^{\frac{2}{3}}$$

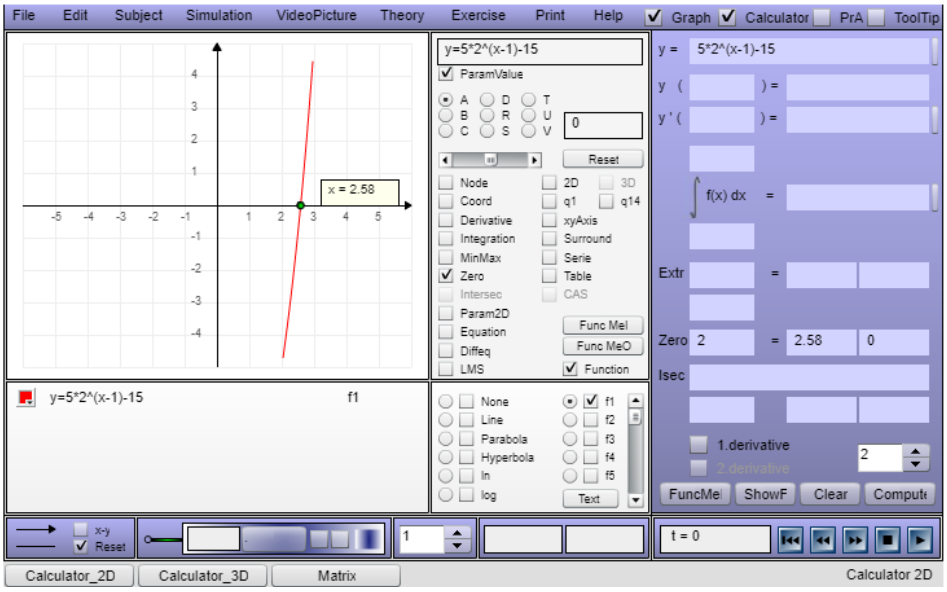
$$\underline{\underline{x = e^{\frac{2}{3}}}}$$



Video

d)

$$
\begin{aligned}
5\cdot 2^{x-1} &= 15 \quad \big|\, :5 \\
2^{x-1} &= 3 \\
\ln 2^{x-1} &= \ln 3 \\
(x-1)\ln 2 &= \ln 3 \\
x-1 &= \frac{\ln 3}{\ln 2} \\
x &= \underline{\underline{\frac{\ln 3}{\ln 2}+1}} \approx 2{,}58
\end{aligned}
$$



Video

04. Derivasjon:

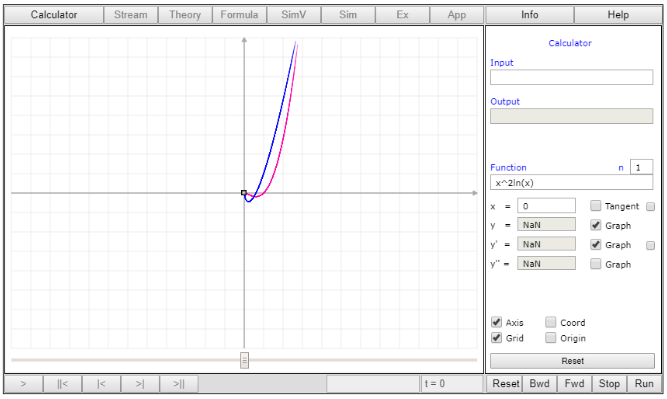
a)

$$f(x) = x^2 \ln x$$

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \tfrac{1}{x}$$

$$\underline{\underline{f'(x) = x(2\ln x + 1)}}$$

Illustrasjon av grafen og tangenten (klikk på bildet):

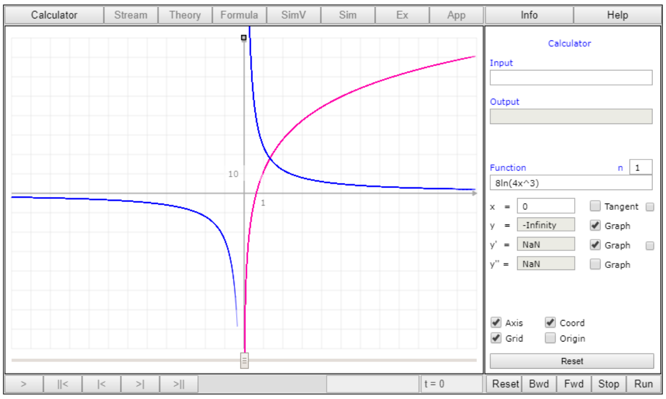


Video

b) $f(x) = 8\ln\left(4x^3\right)$

$$\underline{\underline{f'(x)}} = 8\frac{1}{4x^3} \cdot 12x^2 = \underline{\underline{\frac{24}{x}}}$$

Illustrasjon av grafen og tangenten (klikk på bildet):



Video

05. Integral:

$$\int (x^3 + \frac{1}{x})dx = \int x^3 dx + \int \tfrac{1}{x} dx$$

$$\underline{\underline{= \frac{x^4}{4} + \ln|x| + C}}$$

Video

06. Funksjon: $f(x)=\frac{1}{4}e^x\left(e^x-4\right)$

a) Skjæringspunktene mellom grafen til *f* og koordinataksene.

(1) Skjæringspunkt med y - aksen når $x=0$:

$$\underline{\underline{f(0)}}=\frac{1}{4}e^0\left(e^0-4\right)=\frac{1}{4}(1-4)=\underline{\underline{-\frac{3}{4}}}$$

(2) Skjæringspunkt med x - aksen når $f\left(x\right)=0$:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{4}e^x\left(e^x-4\right)=0 \text{ når } e^x=4 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x=\ln 4=2\ln 2}}$$

b) Vis at: $f'(x)=\frac{1}{2}e^x\left(e^x-2\right)$ og $f''(x)=e^x\left(e^x-1\right)$.

$$f'(x)=\frac{1}{4}e^x\left(e^x-4\right)+\frac{1}{4}e^x\cdot e^x=\frac{1}{4}e^x\left(e^x-4+e^x\right)=\frac{1}{4}e^x\left(2e^x-4\right)$$

$$\underline{\underline{f'\left(x\right)=\frac{1}{2}e^x\left(e^x-2\right)}}$$

$$f''\left(x\right)=\frac{1}{2}e^x\left(e^x-2\right)+\frac{1}{2}e^x\cdot e^x=\frac{1}{2}e^x\left(e^x-2+e^x\right)=\frac{1}{2}e^x\left(2e^x-2\right)$$

$$\underline{\underline{f''\left(x\right)=e^x\left(e^x-1\right)}}$$

c) Bestem koordinatene til funksjonens bunnpunkt og vendepunkt.

Bunnpunktet når $f'(x)=0$

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{2}e^x\left(e^x-2\right)=0 \quad\Rightarrow\quad e^x-2=0 \quad\Rightarrow\quad \underline{x=\ln 2}$$

$$\underline{f\left(\ln 2\right)}=\frac{1}{4}e^{\ln 2}\left(e^{\ln 2}-4\right)=\frac{1}{4}\cdot 2\left(2-4\right)=\underline{-1}$$

$$\underline{\underline{\text{Bunnpunkt: } \left(\ln 2,\,-1\right)}}$$

Vendepunkt når $f''(x)=0$

$$f''\left(x\right)=e^x\left(e^x-1\right)=0 \quad\Rightarrow\quad e^x-1=0 \quad\Rightarrow\quad \underline{x=\ln 1=0}$$

$$\underline{f\left(0\right)}=\frac{1}{4}e^0\left(e^0-4\right)=\frac{1}{4}\cdot 1\left(1-3\right)=\underline{-\frac{3}{4}}$$

$$\underline{\underline{\text{Vendepunkt: } \left(0,\,-\frac{3}{4}\right)}}$$

d) Bestem likningen for tangenten til funksjonen i punktet (1, *f*(1)).

$$\underline{y = f(1)} = \frac{1}{4}e(e-4) = \underline{\frac{e^2}{4} - e \approx -0,87}$$

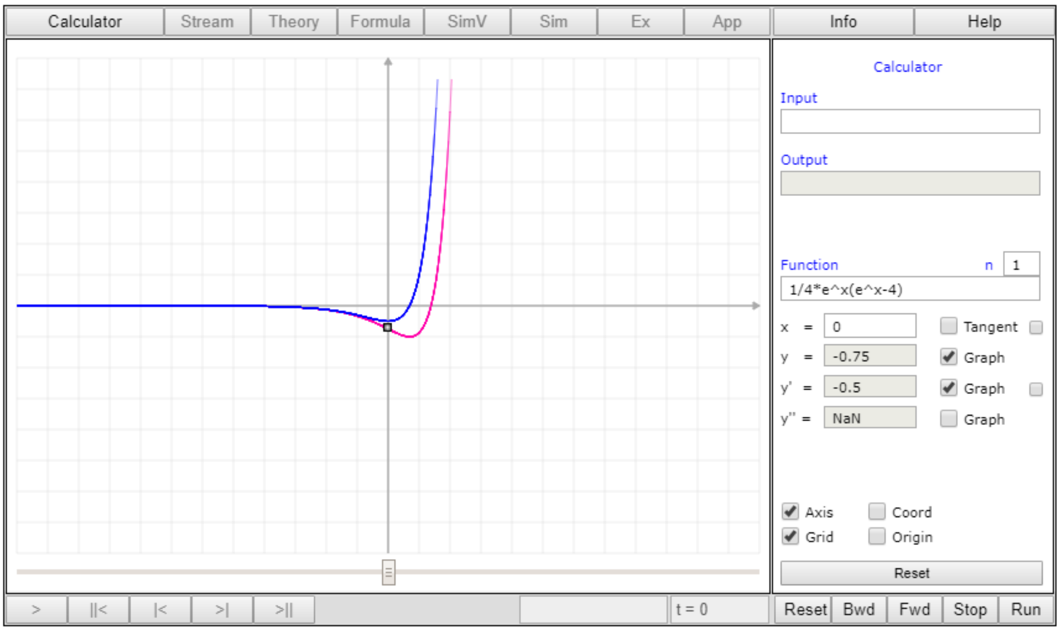
$$\underline{a = f'(1)} = \frac{1}{2}e(e-2) = \underline{\frac{e^2}{2} - e \approx 0,98}$$

Bruker ett-punkts formelen:

$$y + 0,87 = 0,98(x-1) = 0,98x - 0,98$$

$$\underline{\underline{y = 0,98x - 1,85}}$$

Illustrasjon av funksjonen (klikk på bildet):



Video