01. Gitt følgende to matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

a) Summen *C* av disse to matrisene er gitt ved:

$$\begin{aligned} C = A + B &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+3 & -2+0 & 3+2 \\ 4+(-7) & 5+1 & -6+8 \end{bmatrix} \\ &= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}}} \end{aligned}$$

b) For å kunne finne et produkt *AB* mellom to matriser,
må matrise *A* ha like mange kolonner som matrisen *B* har rader.
I vårt tilfelle har matrise *A* 3 kolonner, mens matrise *B* har 2 rader.
Samme problemet oppstår ved produktet *BA*.

Video

02 Gitt følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Bestemmelse av *C* = *AB*:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 2 & 3\cdot 1 + 4\cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}}}$$

b) Bestemmelse av *D* = *BA*:

$$B = BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 3 & 1\cdot 2 + 1\cdot 4 \\ 0\cdot 1 + 2\cdot 3 & 0\cdot 2 + 2\cdot 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}}}$$

c) Ved matrisemultiplikasjon gjelder ikke den kommutative loven,
dvs faktorenes rekkefølge har betydning ved matrisemultiplikasjon.
Vi ser dette tydelig i oppgave a) og b) hvor *C* = *AB* er forskjellig fra *D* = *BA*.

Video

03. Gitt følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Matriseproduktet C = AB er gitt ved:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 6+1\cdot 1+4\cdot(-2) & 2\cdot 3+1\cdot 1+4\cdot 5 & 2\cdot(-1)+1\cdot 0+4\cdot 0 & 2\cdot 0+1\cdot 4+4\cdot 2 \\ 0\cdot 6+1\cdot 1+1\cdot(-2) & 0\cdot 3+1\cdot 1+1\cdot 5 & 0\cdot(-1)+1\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot 4+1\cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 5 & 27 & -2 & 12 \\ -1 & 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}}}$$

b) Ved et matriseprodukt $C = AB$
hvor A er en m x n matrise og hvor B er en p x q matrise
vil C være en m x q matrise.
Det vil si at produktmatrisen $C = AB$ har like mange rader som matrise A
og like mange kolonner som matrisen B.

I vårt tilfelle er A en 2 x 3 matrise, B er en 3 x 4 matrise
og produktet $C = AB$ er en 2 x 4 matrise.
Det vil si at i vårt tilfelle har produktmatrisen $C = AB$
like mange rader som matrisen A (her 2) og like mange kolonner som matrisen B (her 4).
Konklusjon: Den generelle regelen stemmer i vårt tilfelle ved beregningen i a).

Video

04. Gitt følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Den transponerte matrisen A^T er gitt ved rader og kolonner bytter rolle: $a^T_{ij} = a_{ji}$.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Video

05. Gitt et matriseprodukt: $C = AB$.
Element i rad i og kolonne j i C-matrisen er da (pr def av matrisemultiplikasjon) gitt ved:

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

Vi skal vise følgende: $(AB)^T = B^T A^T$

$$C = AB \qquad c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

$$D = C^T = (AB)^T \qquad \mathrm{d}_{ij} = c_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{ki}$$

$$E = B^T A^T \qquad \mathrm{e}_{ij} = \sum_k b^T_{ik} a^T_{kj} = \sum_k b_{ki} a_{jk} = \sum_k a_{jk} b_{ki}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{d}_{ij} = \mathrm{e}_{ij}$$

$$D = E$$

$$\underline{\underline{(AB)^T = B^T A^T}}$$

Video

06. En matrise A sies å være invertibel hvis det finnes en matrise B slik at *AB* = *BA* = *I*.
I er her identitetsmatrisen, dvs den matrisen som har 1 på diagonalen og null ellers.
A og *B* sies å være inverse matriser av hverandre.
Det er klart at et krav til en invertibel matrise er at den må være kvadratisk (den må inneholde like mange rader og kolonner).

Vi har gitt følgende to matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi skal vise at *A* og *B* er inverse matriser av hverandre:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 5\cdot(-1) & 2\cdot(-5) + 5\cdot 2 \\ 1\cdot 3 + 3\cdot(-1) & 1\cdot(-5) + 3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 + (-5)\cdot 1 & 3\cdot 5 + (-5)\cdot 3 \\ (-1)\cdot 2 + 2\cdot 1 & (-1)\cdot 5 + 2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{AB = BA = I}}$$

Video

07. Gitt følgende 2 x 2 matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Determinanten til denne matrisen er:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4\cdot(-2) - (-5)\cdot(-1) = -8 - 5 = \underline{\underline{-13}}$$

Video

08. Beregning av determinanten til følgende matrise:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Vi utvikler etter første kolonne siden vi der har ett null-element:

$$\det(M) = |M| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot\left[(-4)\cdot 5 - 2\cdot(-1)\right] + 0 + 1\cdot\left[3\cdot 2 - (-4)\cdot(-4)\right]$$

$$= 2\cdot(-18) + 0 + 1\cdot(10)$$

$$= -36 + 0 - 10$$

$$= \underline{\underline{-46}}$$

Video

09. Likningsssystem:

$$2x - 3y = 7$$
$$3x + 5y = 1$$

a) Innsettingsmetoden:

$$2x - 3y = 7$$
$$3x + 5y = 1$$

$\Downarrow$ Løser likning nr 2 mht y og setter inn i likning nr 1

$$y = \frac{1-3x}{5}$$

$$2x - 3 \cdot \frac{1-3x}{5} = 7 \qquad | \cdot 5$$

$$10x - 3 \cdot (1-3x) = 35$$

$$10x - 3 + 9x = 35$$

$$19x = 38 \qquad | : 19$$

$$\underline{x = 2}$$

$$y = \frac{1-3x}{5} = \frac{1-3\cdot(-2)}{5} = \frac{-5}{5} = \underline{-1}$$

$$\underline{\underline{(x, y) = (2, -1)}}$$

Video

b) Addisjonsmetoden:

$$2x - 3y = 7 \quad |\cdot 5$$
$$3x + 5y = 1 \quad |\cdot 3$$
$$\Downarrow$$
$$10x - 15y = 35$$
$$9x + 15y = 3$$
$$\Downarrow \quad \text{Adderer likning nr 1 og likning nr 2}$$
$$19x = 38 \,| \quad :19$$
$$\underline{\underline{x = 2}}$$

$$2x - 3y = 7 \quad |\cdot(-3)$$
$$3x + 5y = 1 \quad |\cdot 2$$
$$\Downarrow$$
$$-6x + 9y = -21$$
$$6x + 10y = 2$$
$$\Downarrow \quad \text{Adderer likning nr 1 og likning nr 2}$$
$$19y = -19 \,| \quad :19$$
$$\underline{y = -1}$$

$$\underline{\underline{(x, y) = (2, -1)}}$$

Video

c) Gauss-Jordan reduksjon:

$$2x-3y=7$$
$$3x+5y=1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \to \frac{1}{2}R_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 3 & 5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 - 3R_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{19}{2} & -\frac{19}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 \to \frac{2}{19}R_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_1 \to R_1 + \frac{3}{2}R_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\underline{\underline{(x,y)=(2,-1)}}$$

Video

d) Invers matrise vha Gauss-Jordan reduksjon:

$$2x-3y=7$$
$$3x+5y=1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{R_1\to\frac{1}{2}R_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_2\to R_2-3R_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{19}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_2\to\frac{2}{19}R_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{19} & \frac{2}{19} \end{array}\right]$$

$$\underset{R_1\to R_1+\frac{3}{2}R_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{10}{38} & \frac{3}{19} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{19} & \frac{2}{19} \end{array}\right]$$

$$AX=b$$
$$A^{-1}AX=A^{-1}b$$
$$X=A^{-1}b$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{38} & \frac{3}{19} \\ -\frac{3}{19} & \frac{2}{19} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{19} & \frac{3}{19} \\ -\frac{3}{19} & \frac{2}{19} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 5\cdot 7+3\cdot 1 \\ (-3)\cdot 7+2\cdot 1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 38 \\ -19 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{(x,y)=(2,-1)}}$$

Video

e) Invers matrise vha formel:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 7 \\ 3x + 5y &= 1 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 3 = \underline{19}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{19} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{aligned} AX &= b \\ A^{-1}AX &= A^{-1}b \\ X &= A^{-1}b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 5 \cdot 7 + 3 \cdot 1 \\ (-3) \cdot 7 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 38 \\ -19 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{(x, y) = (2, -1)}}$$

Video

f) Løsning vha determinanter:

$$2x-3y=7$$
$$3x+5y=1$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}7 & -3\\ 1 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 5\end{vmatrix}}=\frac{7\cdot 5-(-3)\cdot 1}{2\cdot 5-(-3)\cdot 3}=\frac{35+3}{10+9}=\frac{38}{19}=\underline{2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 7\\ 3 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 5\end{vmatrix}}=\frac{2\cdot 1-7\cdot 3}{2\cdot 5-(-3)\cdot 3}=\frac{2-21}{10+9}=\frac{-19}{19}=\underline{-1}$$

$$\underline{\underline{(x,y)=(2,-1)}}$$

Video

10. Ved alle deloppgavene ordner vi først likningssystemet:

$$\begin{aligned} 3y+2x&=z+1\\ 3x+2z&=8-5y\\ 3z-1&=x-2y \end{aligned}$$

Ordning av likningssystemet:

$$\begin{aligned} 2x+3y-z&=1\\ 3x+5y+2z&=8\\ x-2y-3z&=-1 \end{aligned}$$

a) Løsning vha Gauss-Jordan reduksjon:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1\\ 3 & 5 & 2 & 8\\ 1 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{Bytter rad 1 og rad 3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1\\ 3 & 5 & 2 & 8\\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2\to R_2-3R_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1\\ 0 & 11 & 11 & 11\\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2\to \frac{1}{11}R_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 7 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-7R_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3\to -\frac{1}{2}R_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2\to R_2-R_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_1\to R_1+2R_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_1\to R_1+3R_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\underline{\underline{(x,y,z)=(3,-1,2)}}$$

Video

b) Løsning vha invers matrise:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{Bytter rad 1 og rad 3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 - 3R_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & 11 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 \to \frac{1}{11} R_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 7 & 5 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 7R_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -\frac{7}{11} & -\frac{1}{11} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to -\frac{1}{2} R_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{22} & \frac{1}{22} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{22} & -\frac{7}{22} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{22} & \frac{1}{22} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_1 \to R_1 + 2R_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & -\frac{10}{22} & \frac{8}{22} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{22} & -\frac{7}{22} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{22} & \frac{1}{22} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_1 \to R_1 + 3R_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{25}{22} & -\frac{13}{22} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{22} & -\frac{7}{22} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{22} & \frac{1}{22} \end{array}\right]$$

$$\underline{\underline{(x, y, z) = (3, -1, 2)}}$$

b) (forts):

$$AX = b$$
$$A^{-1}AX = A^{-1}b$$
$$X = A^{-1}b$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{25}{22} & -\frac{13}{22} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{22} & -\frac{7}{22} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{22} & \frac{1}{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\cdot 1 + (-\frac{25}{22})\cdot 8 + (-\frac{13}{22})\cdot(-1) \\ \frac{1}{2}\cdot 1 + (-\frac{5}{22})\cdot 8 + (-\frac{7}{22})\cdot(-1) \\ -\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{7}{22}\cdot 8 + \frac{1}{22}\cdot(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$$\underline{\underline{(x, y, z) = (3, -1, 2)}}$$

Video

c) Løsning vha determinanter:

$$\begin{aligned} 3y+2x &= z+1 \\ 3x+2z &= 8-5y \\ 3z-1 &= x-2y \end{aligned}$$

Først ordner vi likningssystemet:

$$\begin{aligned} 2x+3y-\ \ z &= 1 \\ 3x+5y+2z &= 8 \\ x-2y-3z &= -1 \end{aligned}$$

Deretter benytter vi determinantberegninger:

$$n = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 22$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}}{n} = \frac{66}{22} = \underline{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{n} = \frac{-22}{22} = \underline{-1}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{n} = \frac{44}{22} = \underline{2}$$

$$\underline{\underline{(x, y, z) = (3, -1, 2)}}$$

Video

11. a) Rotasjonsmatrise for rotasjon en vinkel θ om z-aksen:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin(\theta) & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Den transponerte matrisen R^T er gitt ved (bytter rader og kolonner):

$$R_z^{\,T}(\theta) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Video

b) Den inverse matrisen R^{-1} er gitt ved rotasjon en vinkel $-\theta$:

$$R_z^{\,-1}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Video

c) Fra a) og b) ser vi at den transponerte matrisen R^T er lik den inverse matrisen R^{-1}. Herav får vi:

$$R_z R_z^{\,T} = R_z R_z^{\,-1} = I \qquad \wedge \qquad R_z^{\,T} R_z = R_z^{\,-1} R_z = I$$

Herav følger at rotasjonsmatrisen er en ortogonal matrise.

Video

d) Koordinatene til hjørnene i kvadratet ABCD etter en rotasjon på 30 grader om z-aksen:

$$X_2 = R_z(\theta) X_1$$

$$\begin{bmatrix} a_{2x} & b_{2x} & c_{2x} & d_{2x} \\ a_{2y} & b_{2y} & c_{2y} & d_{2y} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1x} & b_{1x} & c_{1x} & d_{1x} \\ a_{1y} & b_{1y} & c_{1y} & d_{1y} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Video

e) Koordinatene til hjørnene i kvadratet ABCD etter en rotasjon på 30 grader om z-aksen etterfulgt av en translasjon en distanse 1 langs x-aksen (benytter resultatet fra a)):

$$X_2 = T_x(d)R_z(\theta)X_1$$

$$\begin{bmatrix} a_{2x} & b_{2x} & c_{2x} & d_{2x} \\ a_{2y} & b_{2y} & c_{2y} & d_{2y} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_z(\theta)X_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\sqrt{3}+1 & \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Video

f) Merk at resultatet her må bli det samme som i oppgave e).
Merk også at vår rotasjonsmatrise er rotasjon om z-aksen, ikke om en akse normalt på *xy*-plane gjennom punktet (1,0).
Hvis vi skal gjøre beregninger her, så må utføre følgende:
- Translasjon av kvadratet en distanse med lengde 1 i negativ x-retning
- Rotasjon 30 grader om z-aksen
- Translasjon av kvadratet en distanse med lengde 1 i positiv x-retning

$$X_2 = T_x(d)R_z(\theta)T_x(-d)X_1$$

$$\begin{bmatrix} a_{2x} & b_{2x} & c_{2x} & d_{2x} \\ a_{2y} & b_{2y} & c_{2y} & d_{2y} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = T_x(d)R_z(\theta)\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= T_x(d)R_z(\theta)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\sqrt{3}+1 & \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Video

g) Merk at resultatet her *ikke* blir det samme som i oppgave e) og f).

$$X_2 = R_z(\theta)X_1$$

$$\begin{bmatrix} a_{2x} & b_{2x} & c_{2x} & d_{2x} \\ a_{2y} & b_{2y} & c_{2y} & d_{2y} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{1x} & b_{1x} & c_{1x} & d_{1x} \\ a_{1y} & b_{1y} & c_{1y} & d_{1y} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) \\ \frac{1}{2} & 1 & 1-\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Video