Høst –96 Ordinær eksamen

1. a) Vi tenker oss at en partikkel beveger seg langs en rett linje (langs x-aksen).
Partikkelens posisjon s som funksjon av tiden t er gitt ved:

$$s(t) = At^3 + Bt \qquad \text{hvor} \qquad A = 0.50\,\frac{m}{s^3} \qquad B = 8.5\,\frac{m}{s}$$

Beregn partikkelens hastighet etter 3.0 sekunder..

b) Vi tenker oss at en partikkel beveger seg langs en rett linje (langs x-aksen).
Partikkelen har starthastighet 0 (null) og akselerasjonen a som funksjon av tiden t er gitt ved:

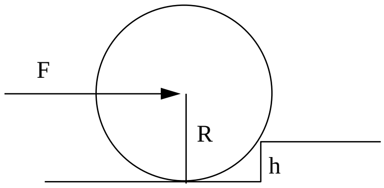
$$a(t) = At^2 \qquad \text{hvor} \qquad A = 0.50\,\frac{m}{s^4}$$

Beregn partikkelens hastighet etter 3.0 sekunder.

2. En fjær er hengt opp vertikalt (loddrett).
Ved måling av fjærkonstanten for denne elastiske fjæren er følgende funnet:
Når fjæren er ubelastet, er enden av fjæren i posisjon 19,5 cm.
Når fjæren belastes med en masse på 53.6 gram, er enden av fjæren i posisjon 27.4 cm.
Maksimal usikkerhet i registreringen av posisjonen er 0.2 cm
og i registreringen av massen 0.5 gram.
Tyngde-akselerasjonen er 9.81 m/s^2 og vi ser bort fra usikkerheten i denne.

Beregn fjærkonstanten og usikkerheten i denne.

3. En uniform massiv sylinder med masse M og radius R hviler mot en vertikal kant med høyde h (se fig).
   På en horisontal akse som går gjennom sylinderens sentrum og som sylinderen kan gli friksjonsfritt rundt, virker vi med en horisontal kraft F og forsøker å få sylinderen til å rulle opp på kanten.



   a) Bestem den minste kraften F (uttrykt ved M, g, R og h) som må til for at sylinderen skal rulle opp på kanten.

   b) Anta nå at kraften F er 20 N større enn minste-kraften som er beregnet i a).
   Beregn vinkel-akselerasjonen som sylinderen får i starten
   (dvs med det samme sylinderen begynner å bevege på seg).
   Følgende data er gitt: M = 10 kg, R = 50 cm, h = 20 cm, g = 9.81 m/s^2.

4. Ved en dempet svingning avtar svinge-amplituden med 30% i løpet av 7.8 sekunder.
   Massen til svinge-systemet er 0.20 kg.
   Beregn dempnings-konstanten.

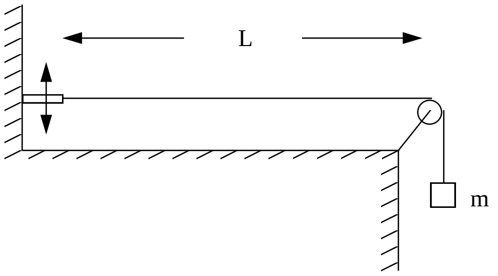
5. Et tog T beveger seg med hastigheten 90 km/h i negativ x-retning mot en observatør A som befinner seg i ro.
   På toget er montert en fløyte som sender ut en lyd med frekvensen 350Hz.
   Lydhastigheten i luft er 330 m/s.

   a) Beregn frekvensen som observatøren A hører.

   b) Anta nå at toget T er i ro og at observatøren A beveger seg i positiv x-retning mot toget med en hastighet på 90 km/h.
   Fløyten på toget sender fortsatt ut lyden beskrevet ovenfor.
   Beregn frekvensen som observatør A nå hører.

   c) Anta nå toget T nå beveger seg som i a), dvs med hastighet 90 km/h i negtiv x-retning mot observatør A og at observatør A samtidig beveger seg med hastighet 90 km/h i positiv x-retning mot toget.
   Fløyten på toget sender fortsatt ut lyden beskrevet ovenfor.
   Beregn frekvensen som observatør A nå hører.

6. En streng er i den ene enden festet til en frekvensgenerator som svinger med en liten amplitude og en konstant frekvens på $f = 120$ Hz.
Den andre enden av strengen går over en trinse og er festet i et lodd med masse m (se fig).
Når loddet har massen $m = 250$ gram, blir svingningene i strengen en stående bølge med 2 knutepunkter i tillegg til knutepunktene i hver av endene av strengen.



Hvor stor må massen m av loddet være for at svingningene i strengen skal bli en stående bølge med 4 knutepunkter i tillegg til knutepunktene i hver av endene av strengen?
Strengen skal fremdeles svinge med den samme frekvensen som nevnt ovenfor ($f = 120$ Hz).

Løsning

1. a)

$$s(t) = At^3 + Bt \qquad \text{hvor} \quad A = 0.50\frac{m}{s^3} \qquad B = 8.5\frac{m}{s}$$

$$v(t) = \dot{s}(t) = \underline{3At^2 + B}$$

$$v(3.0s) = 3 \cdot 0.50\frac{m}{s^3} \cdot (3.0s)^2 + 8.5\frac{m}{s} = \underline{\underline{22.0\frac{m}{s}}}$$

b)

$$a(t) = At^2 \qquad \text{hvor} \quad A = 0.50\frac{m}{s^3}$$

$$a = \dot{v} = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = adt$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t adt = \int_0^t At^2 dt = A\int_0^t t^2 dt = \frac{1}{3}At^3$$

$$v - v_0 = \frac{1}{3}At^3$$

$$v = v_0 + \frac{1}{3}At^3 = 0 + \frac{1}{3} \cdot 0.50\frac{m}{s^3} \cdot (3.0s)^3 = \underline{\underline{4.5\frac{m}{s}}}$$

2.

$$k = \frac{mg}{x} = \frac{mg}{x_2 - x_1} = \frac{53.6 \cdot 10^{-3}\, kg \cdot 9.81\frac{m}{s^2}}{27.4 \cdot 10^{-2}\, m - 19.5 \cdot 10^{-2}\, m} \approx \underline{6.6558987\frac{N}{m}}$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta x}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta k = \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta x}{x}\right)k = \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{x_2 - x_1}\right)k$$

$$= \left(\frac{0.5g}{53.6g} + \frac{0.2cm + 0.2cm}{27.4cm - 19.5cm}\right)6.6558987\frac{N}{m} \approx \underline{\underline{0.40\frac{N}{m}}}$$

$$k \approx \underline{\underline{6.7\frac{N}{m}}}$$

3. a) Den minste kraften vi kan benytte er den kraften vi bruker i begynnelsen, i det hjulet løfter seg fra underlaget og bare berører kanten. F utøver et positvt moment med arm R-h. Mg utøver et negativt moment (roterer andre veien). Armen til Mg kan beregnes vha Pythagoras.

Vi benytter kraftmoment-loven. Den minste kraften får vi når vi lar vinkel-akselerasjonen være lik null (jevn rotasjon). Det midterste leddet i ligningen nedenfor kan egentlig sløyfes (normalkraften N = 0 i det hjulet forlater underlaget.

$$(R-h)F + \sqrt{R^2-(R-h)^2}\cdot N - \sqrt{R^2-(R-h)^2}\cdot Mg = I_0\alpha$$

$$\left.\begin{matrix} N = 0 \\ \alpha = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow F = \frac{\sqrt{R^2-(R-h)^2}}{R-h}Mg$$

b) Samme ligning som ovenfor (men vinkelakselerasjonen er nå ulik null), bortsett fra at F nå økes med et bidrag F_{ex} (ekstrakraften). Ligningen reduseres derfor til bidrag fra kun denne ekstrakraften siden de resterende ledd er lik null (fra a)).

$$(R-h)F_{ex} = I_0\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = \frac{(R-h)F_{ex}}{I_0} = \frac{(R-h)F_{ex}}{\frac{1}{2}MR^2 + MR^2} = \frac{2(R-h)F_{ex}}{3MR^2} = \frac{2\cdot(0.50m-0.20m)\cdot 20N}{3\cdot 10.0kg\cdot(0.50m)^2} = \underline{\underline{1.6s^{-2}}}$$

4.

$$x = Ce^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega' t+\varphi)$$

$$A_1 = Ce^{-\frac{b}{2m}t_1}$$

$$A_2 = Ce^{-\frac{b}{2m}t_2}$$

$$\Downarrow$$

$$A_2 = A_1 e^{-\frac{b}{2m}(t_2-t_1)}$$

$$\Downarrow$$

$$b = \frac{2m}{t_2-t_1}\ln\frac{A_1}{A_2} = \frac{2\cdot 0.200kg}{7.8s}\cdot\ln\frac{A}{\frac{70}{100}A} = \frac{2\cdot 0.200kg}{7.8s}\cdot\ln\frac{100}{70} = \underline{\underline{0.0183\frac{kg}{s}}}$$

5. a)

$$f_L = \frac{v+v_L}{v+v_S}\,f_S = \frac{330\frac{m}{s}+0}{330\frac{m}{s}-90\frac{km}{h}}\cdot 350Hz = \frac{330\frac{m}{s}+0}{330\frac{m}{s}-90\cdot\frac{1000m}{3600s}}\cdot 350Hz = \frac{330\frac{m}{s}+0}{330\frac{m}{s}-25\frac{m}{s}}\cdot 350Hz = \underline{\underline{378.7Hz}}$$

b)

$$f_L = \frac{v+v_L}{v+v_S}\,f_S = \frac{330\frac{m}{s}+90\frac{km}{h}}{330\frac{m}{s}+0}\cdot 350Hz = \frac{330\frac{m}{s}+90\cdot\frac{1000m}{3600s}}{330\frac{m}{s}+0}\cdot 350Hz = \frac{330\frac{m}{s}+25\frac{m}{s}}{330\frac{m}{s}+0}\cdot 350Hz = \underline{\underline{376.5Hz}}$$

c)

$$f_L = \frac{v+v_L}{v+v_S}\,f_S = \frac{330\frac{m}{s}+90\frac{km}{h}}{330\frac{m}{s}-90\frac{km}{h}}\cdot 350Hz = \frac{330\frac{m}{s}+900\cdot\frac{1000m}{3600s}}{330\frac{m}{s}-900\cdot\frac{1000m}{3600s}}\cdot 350Hz = \frac{330\frac{m}{s}+25\frac{m}{s}}{330\frac{m}{s}-25\frac{m}{s}}\cdot 350Hz = \underline{\underline{407.4Hz}}$$

6.

$$f_n = n\cdot f_1 = n\cdot\frac{v}{2L} = n\cdot\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$f_3 = 3\cdot\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F_3}{\mu}} = 3\cdot\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{m_3 g}{\mu}}$$

$$f_5 = 5\cdot\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F_5}{\mu}} = 5\cdot\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{m_5 g}{\mu}}$$

$$f_3 = f_5 \quad\Rightarrow\quad m_5 = (\frac{3}{5})^2 m_3 = (\frac{3}{5})^2\cdot 250g = \underline{\underline{90.0g}}$$