Høst –97 Utsatt eksamen

1. Vi tenker oss at en partikkel beveger seg langs en rett linje (langs x-aksen).
   Partikkelen starter i ro i origo ved tiden t = 0.0 sekunder.
   Partikkelens hastighet v som funksjon av tiden t er gitt ved:

   $$v(t) = At^4 + Bt \qquad \text{hvor} \quad A = 0.40\frac{m}{s^5} \qquad B = 10.0\frac{m}{s^2}$$

   a) Beregn partikkelens posisjon s etter 2.0 sekunder.

2. Figur 1 nedenfor viser et hjul med seks eiker.
   Randa (felgen) har massen m = 6.00 kg og diameteren d = 1.20 m
   Eikene er jamntykke stålstenger, hver med masse m_e = 1.80 kg.

   a) Vis at treghetsmomentet for hjulet om aksen (i sentrum) er:

   $$I_{cm} = (m + 2m_e)\cdot(\frac{d}{2})^2$$

   b) Vis at treghetsmomentet om en akse i randa, parallell med sentrumsaksen er:

   $$I_R = 2(m + 4m_e)\cdot(\frac{d}{2})^2$$

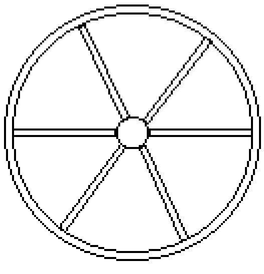
   Hjulet er i ro, men settes i rotasjon om sentrumsaksen av et konstant kraftmoment.
   Vinkelfarten blir 25 rad/s etter tiden 4.0s.

   c) Hvor stor er farten til et punkt på randa da (etter 4.0s)?

   d) Hvor stort er kraftmomentet.

   e) Hvor langt ville hjulet bevege seg dersom det rullet i disse 4.0s?

   f) Kraftmomentet brukt i c), d) og e) fjernes.
   Hjulet ruller ned en bakke. Bakken danner vinkelen 6^0 med horisontalen.
   Hva er den translatoriske farten til hjulet etter 4.0s, når det starter fra ro?
   Hvor langt har hjulet rullet nedover bakken i løpet av disse 4.0 s?



3. Figur 2 nedenfor viser nederst en jevntykk og homogen sylinderformet skive
   med masse M = 3.0 kg og radius R = 0.500m
   Skiven roterer friksjonsfritt om sin vertikale sylinderakse med konstant
   vinkelhastighet 4.00 rad/s.
   Ovenfor skiven er det tegnet en jevntykk og homogen ring med radius r = R/2
   som ikke roterer.

   a) Vis at treghetsmomentet til et sylinderformet legeme er gitt ved uttrykket

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

   b) Finn skivens kinetiske energi og angulære moment (spinn).

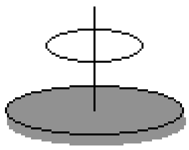
   Ringen som har massen m = 0.500 kg slippes rett ned på skiven slik at de to legemene blir konsentriske. På grunn av friksjonskrefter vil ringen etter en tid få samme vinkelhastighet som skiven.

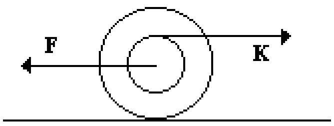
   c) Hva blir vinkelhastigheten til felleslegemet?

   Vi antar nå at de to legemene er festet til hverandre.
   Felleslegemet plasseres på et horisontalt underlag som vist på figur 3 nedenfor.
   En snor som vi regner som masseløs, vikles om ringen.
   Vi drar i snora med en kraft K. En annen kraft F angriper i sentrum.
   Begge kreftene virker horisontalt. De to kreftene avpasses slik at
   sylinderen roterer med konstant vinkelhastighet. Legemets masse-senter blir liggende i ro.
   Friksjonsfaktoren mot underlaget er u = 0.250.

   d) Finn friksjonskraften og angi dens retning.

   e) Finn kreftene K og F.





4. Hvilket strekk må vi ha i en streng med lengde 5.00m og masse 0.160 kg
   for at transverselle bølger med frekvens 30.0 Hz skal ha bølgelengde 0.600m på strengen?

Løsning:

1.

$$v(t) = At^3 + Bt \qquad \text{hvor} \quad A = 0.40\frac{m}{s^4} \qquad B = 10.0\frac{m}{s^2}$$

$$v = \dot{s} = \frac{ds}{dt}$$

$$ds = vdt$$

$$s(t) = \int_0^{st} ds = \int_0^{tt} vdt = \int_0^{t} (At^4 + Bt)dt = \frac{1}{5}At^5 + \frac{1}{2}Bt^2$$

$$s(2.0s) = \frac{1}{5}\cdot 0.40\frac{m}{s^5}\cdot(2.0s)^5 + \frac{1}{2}\cdot 10.0\frac{m}{s^2}\cdot(2.0s)^2 = \underline{\underline{22.56m}}$$

2. a) Hjulet består av randa samt 6 eiker.
Treghetsmoment til en ring (her randa) er lik massen av ringen multiplisert med kvadratet av ringens radius (samme uttrykk som for en punktpartikkel siden all masse befinner seg i samme avstand fra aksen.

$$I_{cm} = m(\frac{d}{2})^2 + 6\cdot\frac{m_e(\frac{d}{2})^2}{3} = \underline{\underline{(m+2m_e)(\frac{d}{2})^2}} \approx 3.456kgm^2$$

b) Benytter parallellakseteoremet hvor total-massen er lik massen til randa pluss massen til 6 eiker og hvor akseforflytningen er lik hjulets radius d/2.

$$I_R = I_{cm} + (m+6m_e)(\frac{d}{2})^2 = \underline{\underline{2(m+4m_e)(\frac{d}{2})^2}} \approx 9.504kgm^2$$

c) Hastigheten til et punkt på randa er lik radius multiplisert med vinkelhastigheten.

$$v_r = r\omega = \frac{d}{2}\omega = \underline{\underline{15\frac{m}{s}}}$$

c) Benytter kraftmomentloven om massesenteret.
Vinkelakselerasjonen bestemmes fra rotasjonsligningen hvor vinkelhastigheten er lik vinkelakserasjonen multiplisert med tiden (vinkelakselerasjonen er konstant og startvinkelhastigheten er lik null).

$$\tau = I_{cm}\alpha = I_{cm}\frac{\omega}{t} = (m+2m_e)(\frac{d}{2})^2\cdot\frac{\omega}{t} = \underline{\underline{21.6Nm}}$$

d) Vi bestemmer først rotasjonsvinkelen i løpet av tiden t når hjulet roterer om sitt massesenter.
Tilbakelagt buelengde for et punkt på randa er lik strekningen som hjulet ruller når hjulet ruller uten å gli.

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\frac{\omega}{t}t^2 = \frac{1}{2}\omega t = \underline{50rad}$$

$$s = r\theta = \frac{d}{2}\theta = \underline{\underline{30m}}$$

e) Dekomponerer tyngden i en komponent langs skråplanet
og en komponent normalt på skråplanet.
Velger momentakse i hjulets kontaktpunkt med skråplanet.
Kun tyngdens parallellkomponent gir kraftmoment om dette punktet siden de andre kreftene (tyngdens normalkomponent og kraften fra skråplanet på hjulet får ingen arm).
Bestemmer akselerasjonen til hjulets massesenter
og benytter deretter veilovene ved konstant akselerasjon.

$$rG\sin 6^0 = I_R\alpha_R \Rightarrow \alpha_R = \frac{rG\sin 6^0}{I_R} = 1.09 s^{-2}$$

$$a_{cm} = r\alpha_R = \frac{d}{2}\alpha_R = 0.6525\frac{m}{s^2}$$

$$v_{cm} = a_{cm}t = \underline{\underline{2.61\frac{m}{s}}}$$

$$s = \frac{1}{2}a_{cm}t^2 = \underline{\underline{5.22m}}$$

3. a) Benytter definisjonen av treghetsmoment for et legeme med kontinuerlig massefordeling.
Innfører en hjelpevariabel (massetetthet ro) lik massen pr volumenhet.
Et infinitesimalt element med masse dm velges som et sylinderskall med radius r.
Dette sylinderskallet utrullet vil være en tynn rektangulær skive med lengde 2*PI*r (sylinderskallets omkrets), høyde L (sylinderens høyde) og tykkelse dr.
Massen dm er lik massetettheten (ro) multiplisert med volumet av dette sylinderskallet.
Massetettheten (ro) fjernes igjen ved til slutt å sette denne lik massen av hele sylinderen delt på volumet av hele sylinderen.

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \cdot \rho \cdot 2\pi r L dr$$

$$I = 2\pi\rho L \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho L R^4 = \frac{1}{2}\pi \frac{M}{\pi R^2 L} L R^{4^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} M R^2}}$$

b) For en ren rotasjon om en fast akse har vi:

$$E_k = \frac{1}{2} I\omega^2 = \underline{\underline{3.00 J}}$$

$$L = I\omega = \underline{\underline{1.50 \frac{kgm}{s}}}$$

c) Velger system lik skive pluss ring.
Det virker ingen ytre kraftmomenter om felles rotasjonsakse på dette systemet.
I følge spinnsatsen er derfor angulært moment for dette systemet bevart,
dvs angulært moment lik før og etter at ringen er plassert på skiven.
For en ren rotasjon er angulært moment lik treghetsmoment multiplisert med vinkelhastighet

$$I_1\omega_1 = I\omega_{21} + I_2\omega_2$$

$$I_1\omega_1 = (I_1 + I_2)\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \underline{\underline{3.69 s^{-1}}}$$

d) Siden systemet (skive pluss ring) roterer samtidig som massesenteret er i ro,
så må skiven spinne (gli) mot underlaget.
Vi kan derfor benytte loven om at friksjonskraften er lik friksjonskoeffisienten multiplisert med normalkraften.
Normalkraften er i størrelse like stor som tyngden (M+m)g siden
massesenteret er i ro og derfor ikke har noen vertikal akselerasjon.

$$F_\mu = \mu(M + m)g = \underline{\underline{8.58 N}}$$

Rotasjonsretning med urviser $\Rightarrow$ F_μ mot høyre

Friksjonskraftens retning kan vi bestemme vha kraftmomentloven om massesenteret.
Kraftmomentet om massesenteret er lik systemets treghetsmoment om massesenteret multiplisert med systemets vinkelakselerasjon (kraftmomentloven).
Siden vinkelhastigheten skal være konstant, må vinkelakselerasjonen være lik null.
Derfor må også kraftmomentet være lik null.
Kun kraften K og friksjonskraften lager moment om masse-senteret (F, tyngden og normalkraften går gjennom massesenteret og får derfor ingen arm).
Mht massesenteret vil K bidra til rotasjon i retning med klokka.
Friksjonskraften må derfor bidra til rotasjon i retning mot klokka
for at det totale kraftmomentet om massesenteret skal bli lik null.
Friksjonskraften må derfor ha retning mot høyre.

e) Benytter Newtons 2. lov horisontalt om massesenteret.
Siden massesenteret er i ro (og derfor ingen akselerasjon horisontalt), må summen av kreftene horisontalt være lik null.

Videre benyttes kraftmoment (definisjon) og kraftmomentloven om massesenteret.
Siden systemet roterer med konstant vinkelhastighet (og derfor ikke har noen vinkelakselerasjon), må kraftmomentet om massesenteret i følge kraftmomentloven være lik null.

$$K + F_{\mu} - F = (M + m)a_{cmx} = (M + m)\cdot 0 = 0 \qquad \text{Newtons 2. lov horisontalt}$$

$$\tau_{cm} = rK - RF_{\mu} = \frac{R}{2}K - RF_{\mu} \qquad \text{Kraftmoment om massesenteret (def)}$$

$$\tau_{cm} = I_{cm}\alpha = I_{cm}\cdot 0 = 0 \qquad \text{Kraftmomentlov om massesenteret}$$

$$\Downarrow$$

$$K + F_{\mu} - F = 0$$

$$\frac{R}{2}K - RF_{\mu} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$K + F_{\mu} - F = 0$$

$$\frac{1}{2}K - F_{\mu} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$K = 2F_{\mu} = 2\cdot 8.58N = \underline{\underline{17.2N}}$$

$$F = K + F_{\mu} = 17.2N + 8.58N = \underline{\underline{25.8N}}$$

4.

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

.

$$\Downarrow$$

$$F = \mu v^2 = \frac{m}{L}(\lambda f)^2 = \frac{0.160kg}{5.00m}\cdot(0.600m\cdot 30.0Hz)^2 = \underline{\underline{10.4N}}$$