UNIVERSITETET I AGDER
Grimstad

E K S A M E N S O P P G A V E :

FAG: **FYS122 Fysikk** **LÆRER:** **Fysikk : Per Henrik Hogstad**

Klasse(r):	**Dato: 21.05.14**	**Eksamenstid, fra-til: 09.00 – 14.00**	
Eksamensoppgaven består av følgende	**Antall sider: 6 (inkl. forside)**	**Antall oppgaver: 4**	**Antall vedlegg: 0**
Tillatte hjelpemidler er:	**Kalkulator** **Formelsamling: Hogstad / Haugan / Gyldendal**		

FYS122 Ordinær eksamen 2014

Ta dine egne forutsetninger hvis du finner uklarheter/mangler i oppgavesettet!

Poeng på hver deloppgave:

Oppg		Poeng
1	a)	3
	b)	3
	c)	3
2	a)	3
	b)	3
	c)	3
	d)	3
	e)	3
	f)	3
3	a)	3
	b)	3
4	a)	3
	b)	3
Sum		39

Poengene viser vekt-fordelingen for de enkelte del-spørsmålene.
Ved karaktersetting vektlegges selvfølgelig i tillegg en totalvurdering,
bl.a. en vurdering av i hvilken grad kandidaten har kunnskaper innenfor
de ulike områdene gitt i oppgavesettet.

Lykke til !

1. En partikkel beveger seg i *xy*-planet og passerer posisjonen (x, y) = (2.00 m, 5.00 m) ved tiden t = 0.
   Hastigheten som funksjon av tiden t er gitt ved:

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} At \\ B\cos(Ct) \end{bmatrix}$$

hvor

$$A = 0.200\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \qquad B = 4.00\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad C = 2.00\ \text{s}^{-1}$$

a) Bestem ved regning partikkelens hastighet etter 10.0 sekunder.

b) Bestem partikkelens akselerasjon (x- og y-komponent) etter 10.0 sekunder.

c) Bestem partikkelens posisjon (x- og y-koordinat) etter 10.0 sekunder.

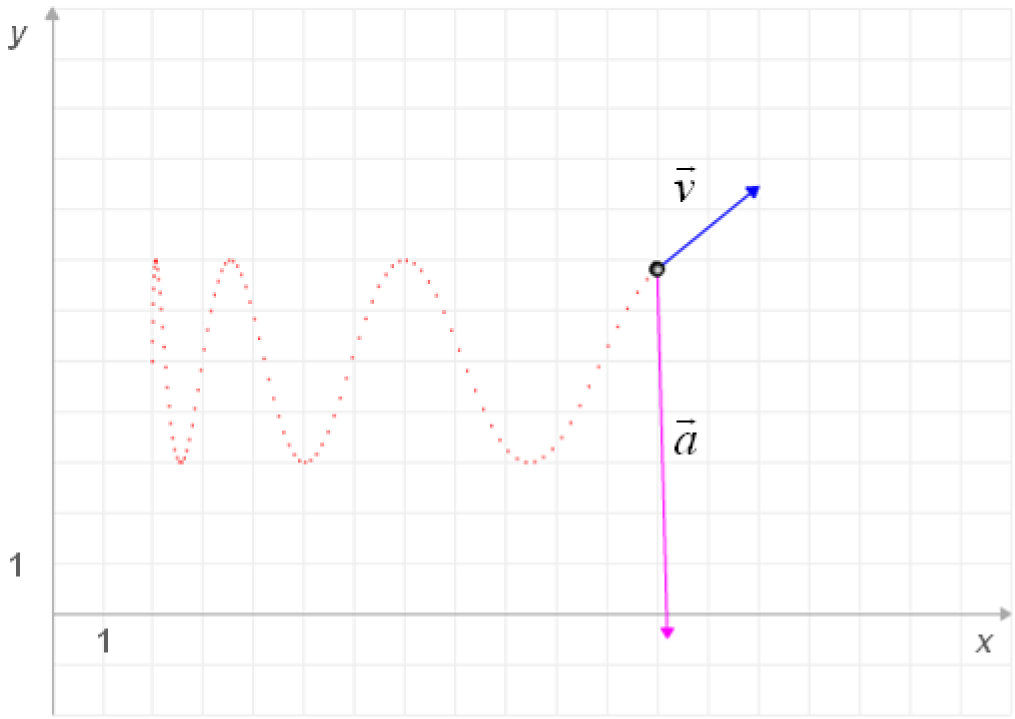


Fig 1.1

Figuren viser partikkelbanen de første 10.0 sekundene,
samt hastighetsvektor og akselerasjonsvektor etter 10.0 sekunder.

2. En massiv sylinder med jevn massefordeling har masse M og radius R.
   Sylinderen ruller på et horisontalt underlag.
   Rundt sylinderen er viklet en masseløs snor som fra sylinderen går horisontalt videre rundt en masseløs og friksjonsfri trinse.
   I enden av snoren henger et lodd med masse m.
   Tyngdeakselerasjonen er g.

   Vi tenker oss at det i første omgang er tilstrekkelig friksjon mellom sylinderen og det horisontale underlaget til at sylinderen kan rulle uten å gli.

   a) Tegn inn og forklar alle ytre krefter som virker på loddet.

   b) Tegn inn og forklar alle ytre krefter som virker på sylinderen.

   c) Bestem akselerasjonen a til loddet uttrykt ved en eller flere av størrelsene M, m, R og g.

   d) Bestem akselerasjonen a_{cm} til massesenteret av sylinderen uttrykt ved en eller flere av størrelsene M, m, R og g.

   Vi tenker oss at det nå mht til de neste spørsmålene ikke er noen friksjon mellom sylinderen og det horisontale underlaget.

   e) Bestem akselerasjonen a til loddet uttrykt ved en eller flere av størrelsene M, m, R og g.

   f) Bestem akselerasjonen a_{cm} til massesenteret av sylinderen uttrykt ved en eller flere av størrelsene M, m, R og g.

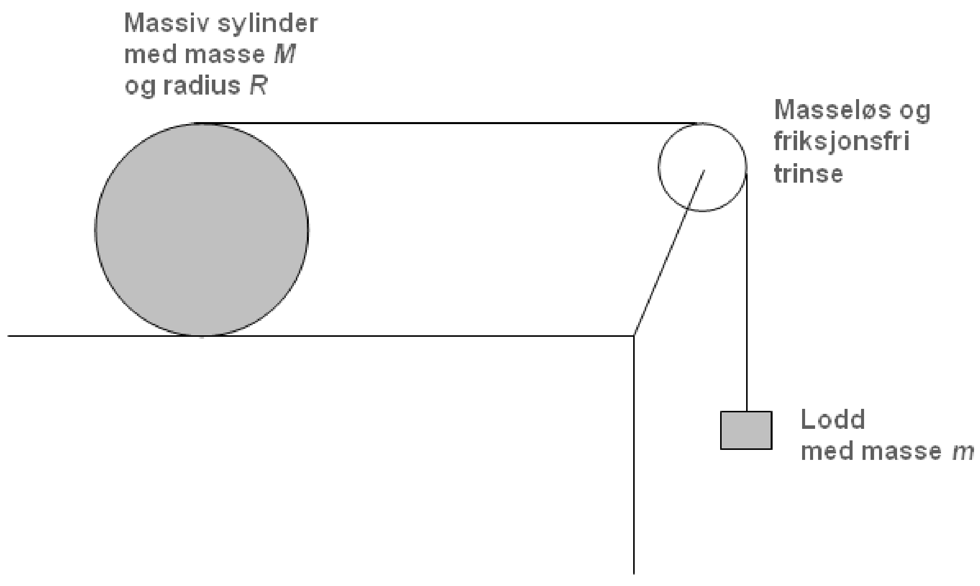


Fig 2.1

3. Vi har en fast sylinder S_1 med radius R.
Vinkelhastigheten ω_1 til denne sylinderen er lik null (sylinderen er i ro, den står fast).
Inne i denne sylinderen har vi en annen sylinder S_2 med radius r.
Disse to sylindrene har felles senterakse gjennom punktet P normalt på papirplanet.
Den innerste sylinderen S_2 roterer med en vinkelhastighet ω_2.

Mellom den innerste roterende sylinderen S_2 og den ytre faste sylinderen S_1
befinner det seg en tredje sylinder S_3 som akkurat berører utsiden av den innerste sylinderen S_2
og innsiden av den ytterste sylinderen S_1.
Sylinderen S_3 har senterakse gjennom punktet C normalt på papirplanet.

Når den innerste sylinderen S_2 roterer, så roterer også den tredje sylinderen S_3
slik at denne sylinderen S_3 roterer uten å gli mot de to andre sylindrene S_1 og S_2.

a) Bestem vinkelhastigheten ω_3 til den tredje sylinderen S_3 uttrykt ved vinkelhastigheten ω_2
til sylinderen S_2 og de to radiene r og R.

b) Bestem vinkelhastigheten ω_{PC} til linjestykket PC uttrykt ved vinkelhastigheten ω_2
til sylinderen S_2 og de to radiene r og R.

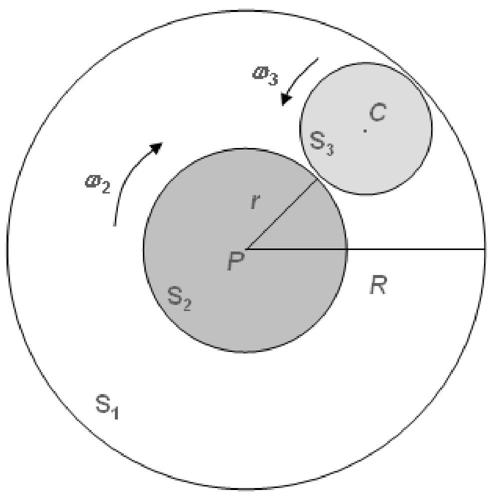


Fig 3.1

4. a) Utled differensialligningen og svingetiden for små svingninger av en matematisk pendel (pendel hvor all masse er samlet i ett punkt). Forklar.

   b) Det kan vises at svingetiden for en fysisk pendel (en pendel hvor ikke nødvendigvis all masse er samlet i ett punkt) er gitt ved:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

   I er her treghetsmomentet til den fysiske pendelen mht aksen gjennom opphengningspunktet, *m* er massen av pendelen, g er tyngdeakselerasjonen og *d* er avstanden fra opphengningspunktet til pendelens massesenter.

   En matematisk pendel er et spesialtilfelle av en fysisk pendel.
   Vi kan derfor benytte formelen for svingetiden til en fysisk pendel til å utlede formelen for svingetiden til en matematisk pendel.
   Gjør dette og vis at resultatet er i overensstemmelse med svingetiden utledet i oppg a).

Løsning:

1. Hastighet som funksjon av tiden:

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} At \\ B\cos(Ct) \end{bmatrix} \qquad A = 0.200\frac{m}{s^2} \quad B = 4.00\frac{m}{s} \quad C = 2.00s^{-1}$$

a) Hastighet:

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} At \\ B\cos(Ct) \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}(10.0s) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.200\frac{m}{s^2}\cdot 10.0s \\ 4.00\frac{m}{s}\cos(2.00s^{-1}\cdot 10.0s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.00\frac{m}{s} \\ 1.63\frac{m}{s} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2.00 \\ 1.63 \end{bmatrix}\frac{m}{s}}}$$

b) Akselerasjon:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} A \\ -BC\sin(CT) \end{bmatrix}}$$

$$\vec{a}(10.0s) = \begin{bmatrix} 0.200\frac{m}{s^2} \\ -4.00\frac{m}{s}\cdot 2.00s^{-1}\cdot\sin(2.00s^{-1}\cdot 10.0s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.200\frac{m}{s^2} \\ -7.30\frac{m}{s^2} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0.200 \\ -7.30 \end{bmatrix}\frac{m}{s^2}}}$$

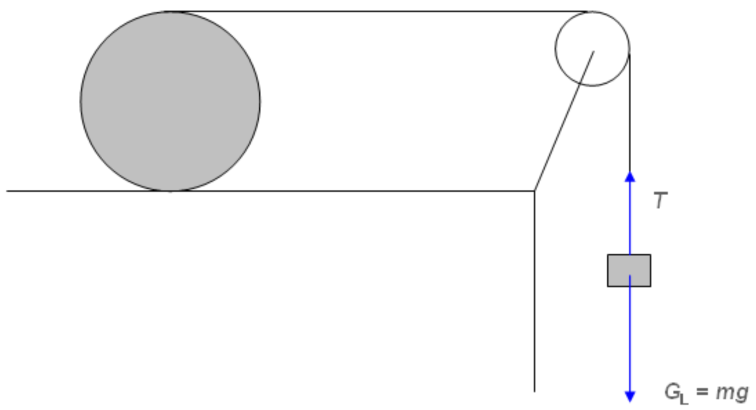
c) Posisjon:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t)dt = \begin{bmatrix} r_{0x} \\ r_{0y} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} r_{0x} \\ r_{0y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t v_x dt \\ \int_0^t v_y dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{0x} \\ r_{0y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t Atdt \\ \int_0^t (B\cos(Ct)dt \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_{0x} \\ r_{0y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}At^2 \\ \frac{B}{C}\sin(Ct) \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} r_{0x} + \frac{1}{2}At^2 \\ r_{0y} + \frac{B}{C}\sin(Ct) \end{bmatrix}}$$

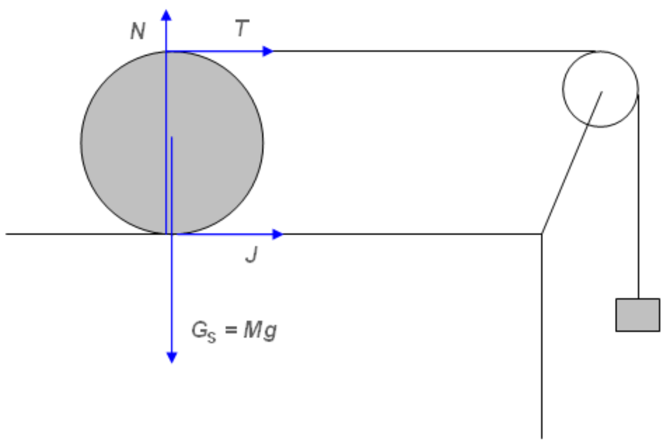
$$\vec{r}(10.0s) = \begin{bmatrix} 2.00m + \frac{1}{2}\cdot 0.200\frac{m}{s^2}\cdot(10.0s)^2 \\ 5.00m + \frac{4.00\frac{m}{s}}{2.00s^{-1}}\sin(2.00s^{-1}\cdot 10.0s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.0m \\ 6.83m \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 12.0 \\ 6.83 \end{bmatrix} m}}$$

2. a) Alle ytre krefter på loddet:



$G_L = mg$	Tyngden av loddet (kraften på loddet fra jorden).
T	Snorstrekk

b) Alle ytre krefter på sylinderen:



$G_S = Mg$	Tyngden av sylinderen (kraften på sylinderen fra jorden).
N	Normalkraften Vertikalkomponenten av kraften på sylinderen fra underlaget Motsatt like stor som tyngden av sylinderen siden massesenteret av sylinderen ikke har noen vertikal akselerasjon
T	Snorstrekk Samme størrelse som snorstrekket på loddet siden trinsen er masseløs og friksjonsfri
J	Friksjon Horisontalkomponenten av kraften på sylinderen fra underlaget

c) Akselerasjonen av loddet:

$mg - T = ma$ Newtons 2.lov på loddet

$\tau_P = 2RT$ Kraftmoment (def) på sylinderen (momentakse i kontaktpunkt)

$\tau_P = I_P\alpha$ Kraftmomentlov (momentakse i kontaktpunkt)

$I_P = I_{cm} + Md^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$ Treghetsmoment mht akse gjennom kontaktpunkt

$a = 2R\alpha$ Sammenheng mellom akselerasjon til snoren og vinkelakselerasjon

$\Downarrow$

$$a = 2R\alpha = 2R\frac{\tau_P}{I_P} = 2R\frac{2RT}{\frac{3}{2}MR^2} = \frac{8T}{3M} = \frac{8(mg - ma)}{3M}$$

$$3Ma = 8mg - 8ma$$

$$(8m + 3M)a = 8mg$$

$$a = \frac{8mg}{8m + 3M} = \underline{\underline{\frac{1}{1 + \frac{3}{8}\frac{M}{m}}g}}$$

d) Akselerasjonen av massesenteret av sylinderen:

$a = 2R\alpha$ Sammenheng mellom akselerasjon til snoren og vinkelakselerasjon

$a_{cm} = R\alpha$ Sammenheng mellom akselerasjon til assesenter og vinkelakselerasjon

$\Downarrow$

$$a_{cm} = \frac{1}{2}a = \underline{\underline{\frac{1}{2}\frac{1}{1 + \frac{3}{8}\frac{M}{m}}g}}$$

e) Akselerasjonen av loddet:
Merk at relasjonen a = r α ikke gjelder hvis hjulet glir mot underlaget.
Merk at kraftmomentloven $\tau = I\alpha$ ikke kan benyttes om kontaktpunktet hvis sylinderen glir.

$T = Ma_{cm}$ Newtons 2.lov på sylinderen (horisontalt)

$mg - T = ma$ Newtons 2.lov på loddet

$\tau_{cm} = RT$ Kraftmoment (def) på sylinderen (momentakse i massesenteret)

$\tau_{cm} = I_{cm}\alpha$ Kraftmomentlov (momentakse i massesenteret)

$I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$ Treghetsmoment mht akse i massesenteret

$a = a_{cm} + R\alpha$ Sammenheng mellom a, a_{cm} og vinkelakselerasjon

$\Downarrow$

$$a = a_{cm} + R\alpha = \frac{T}{M} + R\frac{\tau_{cm}}{I_{cm}} = \frac{T}{M} + R\frac{RT}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{T}{M} + \frac{2T}{M} = \frac{3T}{M} = \frac{3(mg - ma)}{M}$$

$$Ma = 3mg - 3ma$$

$$(3m + M)a = 3mg$$

$$a = \frac{3mg}{3m + M} = \underline{\underline{\frac{1}{1 + \frac{1}{3}\frac{M}{m}}g}}$$

f) Akselerasjonen av massesenteret av sylinderen:

$\tau_{cm} = I_{cm}\alpha$ Kraftmomentlov (momentakse i massesenteret)

$\Downarrow$

$$\alpha = \frac{\tau_{cm}}{I_{cm}} = \frac{RT}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{2T}{MR} = \frac{2Ma_{cm}}{MR} = \frac{2a_{cm}}{R}$$

$$a_{cm} = a - R\alpha = a - R\frac{2a_{cm}}{R} = a - 2a_{cm}$$

$$3a_{cm} = a$$

$$a_{cm} = \frac{1}{3}a = \underline{\underline{\frac{1}{3}\frac{1}{1 + \frac{1}{3}\frac{M}{m}}g}}$$

eller:

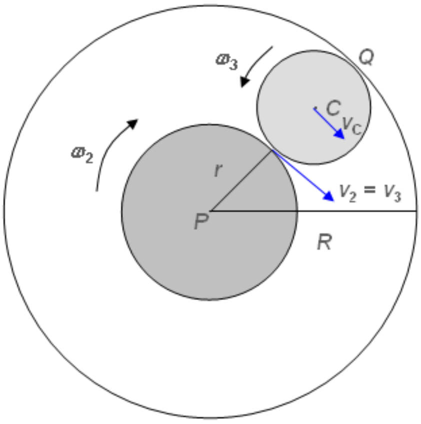
$T = Ma_{cm}$ Newtons 2.lov på sylinderen

$\Downarrow$

$$a_{cm} = \frac{T}{M} = \frac{mg - ma}{M} = \frac{m}{M}(g - a) = \frac{m}{M}\left(g - \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\frac{M}{m}}g\right) = \frac{m}{M}\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\frac{M}{m}}\right)g$$

$$= \frac{m}{M}\left(\frac{1 + \frac{1}{3}\frac{M}{m}}{1 + \frac{1}{3}\frac{M}{m}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\frac{M}{m}}\right)g = \frac{m}{M}\frac{1 + \frac{1}{3}\frac{M}{m} - 1}{1 + \frac{1}{3}\frac{M}{m}}g == \frac{m}{M}\frac{\frac{1}{3}\frac{M}{m}}{1 + \frac{1}{3}\frac{M}{m}}g = \underline{\underline{\frac{1}{3}\frac{1}{1 + \frac{1}{3}\frac{M}{m}}g}}$$

3.



Sammenfallende punkter (fellespunkt) mellom de to sylindrene S_2 og S_3 har samme hastighet. Sylinder S_3 ruller (uten å gli) om kontaktpunktet Q mellom sylinder S_1 og S_3.

$v_2 = r\omega_2$	Hastighet til periferipunkt på sylinder S_2
$v_3 = v_2$	Hastighet til periferipunkt på sylinder S_3 (S_3 ruller uten å gli mot S_2)
$v_Q = 0$	S_3 ruller uten å gli mot S_1
$v_C = \frac{1}{2}v_3$	Sykloide - prinsipp

a) Vinkelhastighet til sylinder S_3:

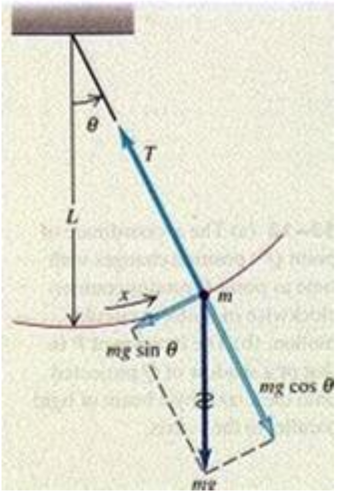
$$v_3 = v_2$$
$$(R-r)\omega_3 = r\omega_2$$
$$\omega_3 = \underline{\underline{\frac{r}{R-r}\omega_2}}$$

b) Vinkelhastighet til linjen PC:

$$v_C = \frac{1}{2}v_3 = \frac{1}{2}v_2$$
$$(r + \frac{R-r}{2})\omega_{PC} = \frac{1}{2}r\omega_2$$
$$\omega_{PC} = \frac{\frac{1}{2}r\omega_2}{r + \frac{R-r}{2}} = \underline{\underline{\frac{r}{R+r}\omega_2}}$$

4. Matematisk pendel:

a) Diff.lign. for en matematisk pendel:



$$F_{tan} = ma_{tan}$$ Newtons 2.lov tangentialt til banen

$$-mg\sin\theta = ma_{tan}$$

$$ma_{tan} + mg\sin\theta = 0$$

$$mL\alpha + mg\sin\theta = 0$$

$$mL\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0$$

$$L\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$ For små vinkelutslag gjelder $\sin\theta \approx \theta$

$$\underline{\underline{L\ddot{\theta} + g\theta = 0}}$$

Svingetid for en matematisk pendel:

$$L\ddot{\theta} + g\theta = 0$$ Diff.lign.

$$\theta = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$ Generell løsning av diff.lign., samt vinkelhastighet

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \underline{\underline{2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}}$$ Svingetid

b) Svingetid for en matematisk pendel som et spesialtilfelle av en fysisk pendel:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{mgL}} = \underline{\underline{2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}}$$