UNIVERSITETET I AGDER
Grimstad

E K S A M E N S O P P G A V E :

FAG: FYS122 Fysikk **LÆRER: Fysikk : Per Henrik Hogstad**

Klasse(r):	**Dato: 28.05.15**	**Eksamenstid, fra-til: 09.00 – 14.00**	
Eksamensoppgaven består av følgende	**Antall sider: 6 (inkl. forside)**	**Antall oppgaver: 3**	**Antall vedlegg: 0**
Tillatte hjelpemidler er:	**Kalkulator** **Formelsamling: Hogstad / Haugan / Gyldendal**		

FYS122 Ordinær eksamen 2015

Ta dine egne forutsetninger hvis du finner uklarheter/mangler i oppgavesettet!

Poeng på hver deloppgave:

Oppg		Poeng
1	a)	3
	b)	3
	c)	3
2	a)	3
	b)	3
	c)	3
	d)	3
	e)	3
	f)	3
	g)	3
3	a)	3
	b)	3
	c)	3
	d)	3
Sum		42

Poengene viser vekt-fordelingen for de enkelte del-spørsmålene.
Ved karaktersetting vektlegges selvfølgelig i tillegg en totalvurdering, bl.a. en vurdering av i hvilken grad kandidaten har kunnskaper innenfor de ulike områdene gitt i oppgavesettet.

Lykke til !

1. En partikkel beveger seg i *xy*-planet og befinner seg i posisjon (x, y) = (0.00 m, 8.00 m) ved tiden $t = 0$.
   Hastigheten som funksjon av tiden t er gitt ved:

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} At + B\cos(Ct) \\ Dt \end{bmatrix}$$

hvor

$$A = 0.500\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \qquad B = 2.00\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad C = 2.00\ \text{s}^{-1} \qquad D = -0.100\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

a) Bestem ved regning partikkelens hastighet (*x*- og *y*-komponent) etter 7.00 sekunder.

b) Bestem partikkelens akselerasjon (*x*- og *y*-komponent) etter 7.00 sekunder.

c) En annen partikkel starter i ro i posisjon (x, y) = (0.00 m, 5.00 m) ved tiden $t = 0$.
Denne partikkelen beveger seg kun i *x*-retning (ingen bevegelse i *y*-retning) og har konstant akselerasjon.
Hvilken akselerasjon må denne partikkelen ha for at de to partiklene skal kollidere?

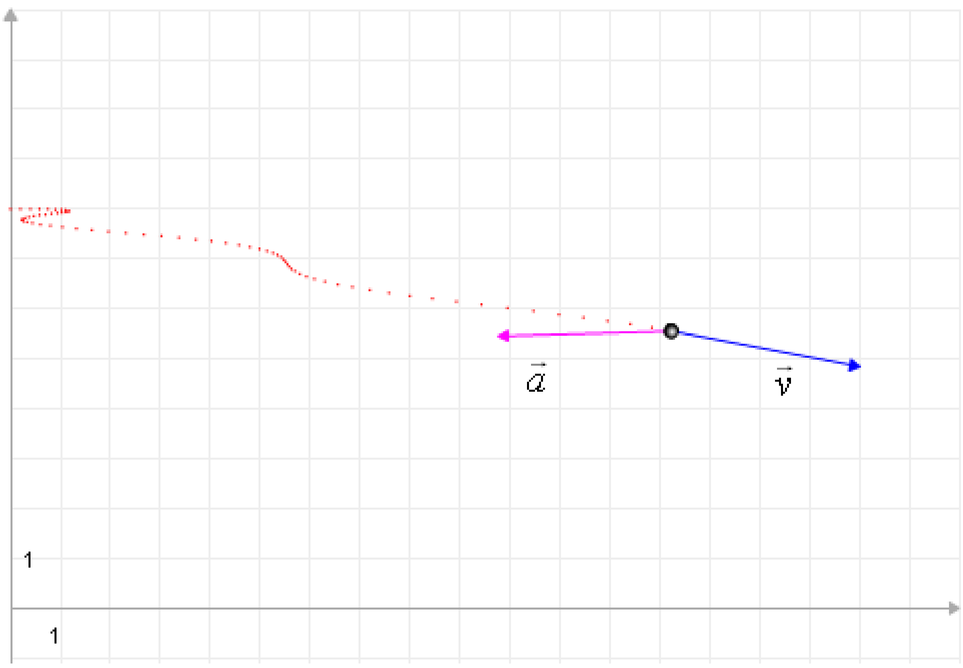


Fig 1.1

Figuren viser partikkelbanen (*x*- og *y*-koordinater) for den førstnevnte partikkelen de første 5.00 sekundene, samt hastighetsvektor og akselerasjonsvektor etter 5.00 sekunder.
For posisjon svarer 1 rute til 1 m, hastighet 1 m/s og akselerasjon 1 m/s^2.

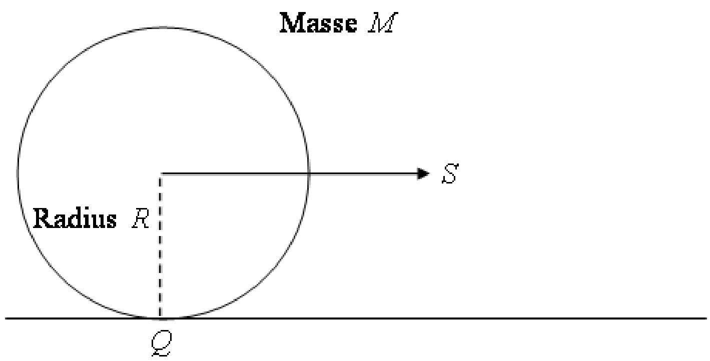
2. En massiv sylinder med jevn massefordeling har masse M og radius R (se figur 2.1).
Sylinderen ruller på et horisontalt underlag.
Til senteraksen av sylinderen er festet en masseløs snor.
Vi drar i denne snoren med en konstant, horisontal kraft S.

Det er tilstrekkelig friksjon mellom sylinderen og underlaget, slik at sylinderen ruller uten å gli mot underlaget.
Sylinderens kontaktpunkt med underlaget kaller vi Q.

a) Tegn inn og forklar alle ytre krefter som virker på sylinderen.

b) Bestem akselerasjonen til massesenteret av sylinderen.
uttrykt ved en eller flere av størrelsene S, M, og R .

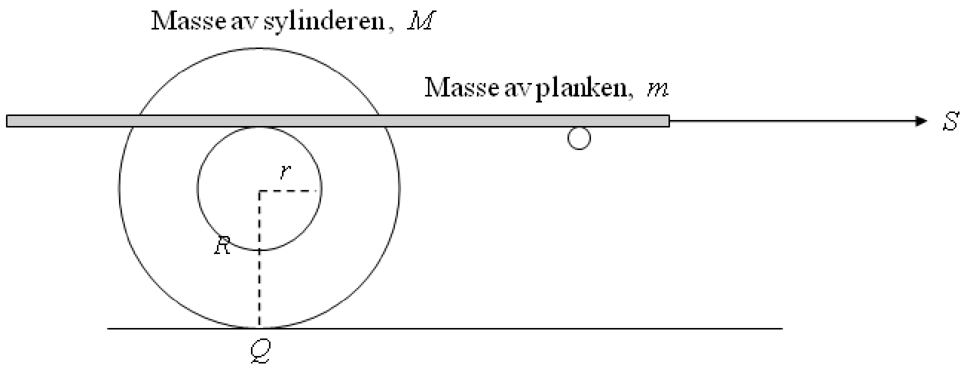
c) Bestem friksjonskraften som virker på sylinderen fra underlaget
uttrykt ved en eller flere av størrelsene S, M, og R .



Figur 2.1

2. forts)

I resten av denne oppgaven skal vi nå tenke oss at vi til sylinderen nevnt ovenfor fester en masseløs ring med radius *r* og med samme senter som sylinderen. Ringen har en tilstrekkelig bredde (ut av papirplanet) slik at vi kan plassere en planke med masse *m* horisontalt på denne ringen. Vi drar i denne planken med en konstant, horisontal kraft *S* (se fig 2.2). Det er tilstrekkelig friksjon mellom ringen og planken slik at planken ikke glir mot ringen når systemet (sylinder, ring og planke) beveger seg. Sylinderen ruller uten å gli mot underlaget. Et lite, fast, friksjonsfritt støttehjul sørger for at planken hele tiden holder seg i horisontal stilling. Det er ingen friksjon mellom støttehjulet og planken.



Figur 2.2

d) Tegn inn i to forskjellige figurer og forklar alle ytre krefter som virker på henholdsvis planken og sylinderen.

e) Bestem akselerasjonen a_P til planken uttrykt ved en eller flere av størrelsene *S*, *M*, *m*, *R* og *r*.

f) Bestem akselerasjonen a_{cm} til massesenteret av sylinderen uttrykt ved en eller flere av størrelsene *S*, *M*, *m*, *R* og *r*.

g) Hva blir resultatet i e) hvis sylinderen er masseløs? Kommenter resultatet.
Hva blir resultatet i e) hvis ringens radius er lik null samtidig som planken er masseløs?
Kommenter det siste resultatet i forhold til svaret i b).

I oppgave g) skal du begrunne svarene med utgangspunkt i resultatet fra e).
Hvis du ikke har klart å komme frem til et svar i e), kan du likevel forsøke å begrunne hvilke to svar du vil forvente i oppgave g).

3. Vi har en kloss med masse m = 2.00 kg som kan gli friksjonsfritt på et horisontalt underlag.
   Klossen er forbundet med en elastisk fjær med fjærkonstant k = 50.0 N/m.
   Systemet kloss/fjær gjennomfører en enkel harmonisk svingning (SHM).
   Tyngdeakselerasjonen g er lik 9.81 m/s^2.

   a) Bestem svingetiden for denne SHM-bevegelsen.

   b) Vi har en matematisk pendel med lengde L_1.
      Bestem denne lengden L_1 slik at pendelen får samme svingetid som systemet kloss/fjær.
      Vi forutsetter at pendelens vinkelutslag er lite.

   c) Vi har en tynn, jevntykk stav med lengde L_2 som svinger om sitt ene endepunkt.
      Bestem lengden L_2 av denne staven slik at staven får samme svingetid som systemet kloss/fjær.
      Vi forutsetter at pendelens vinkelutslag er lite.

   d) På staven beskrevet i c) plasserer vi en punktmasse med samme masse som staven.
      i den motsatte enden av staven i forhold til opphengningspunktet.
      Opphengningspunktet er altså i den ene enden av staven,
      punktmassen er plasser i den andre enden av staven.
      Staven i denne deloppaven har samme lengde som stavlengden L_2 beregnet i c).
      Vi forutsetter at pendelens vinkelutslag er lite.
      Bestem svingetiden for denne pendelen.

Løsning:

1. Hastighet som funksjon av tiden:

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} At + B\cos(Ct) \\ Dt \end{bmatrix}$$

$$A = 0.500\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \qquad B = 2.00\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \qquad C = 2.00\ \text{s}^{-1} \qquad D = -0.100\frac{m}{s^2}$$

a) Hastighet:

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} At + B\cos(Ct) \\ Dt \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}(10.0s) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.500\frac{m}{s^2}\cdot 7.00s + 2.00\frac{m}{s\vec{v}}\cdot\cos(2.00s^{-1}\cdot 7.00s \\ -0.100\frac{m}{s^2}\cdot 7.00s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.77\frac{m}{s} \\ -0.70\frac{m}{s} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2.00 \\ -0.70 \end{bmatrix}\frac{m}{s}}}$$

b) Akselerasjon:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} A - BC\sin(Ct) \\ D \end{bmatrix}}$$

$$\vec{a}(4.00s) = \begin{bmatrix} 0.500\frac{m}{s^2} - 2.00\frac{m}{s^2}\sin(2.00s^{-1}\cdot 7.00s) \\ -0.100\frac{m}{s^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.46\frac{m}{s^2} \\ -0.10\frac{m}{s^2} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3.46 \\ -0.10 \end{bmatrix}\frac{m}{s^2}}}$$

c) Posisjon for partikkel nr 1:

$$\vec{r}(t) = s_0 + \int_0^t \vec{v}(t)dt = \begin{bmatrix} r_{0x} \\ r_{0y} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} r_{0x} \\ r_{0y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t v_x dt \\ \int_0^t v_y dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{0x} \\ r_{0y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t (At + B\cos(Ct))dt \\ \int_0^t (Dt)dt \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_{0x} \\ r_{0y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}At^2 + \frac{B}{C}\sin(Ct) \\ \frac{1}{2}Dt^2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} r_{0x} + \frac{1}{2}At^2 + \frac{B}{C}\sin(Ct) \\ r_{0y} + \frac{1}{2}Dt^2 \end{bmatrix}}$$

Tidspunkt for partikkel nr 1's passering av høyde y = y_2 = 5.00 m:

$$r_y = y_2$$
$$r_{0y} + \frac{1}{2} D t_k^{\;2} = y_2$$
$$t_k = \sqrt{2 \frac{y_2 - r_{0y}}{D}} = \sqrt{2 \frac{5.00m - 8.00m}{-0.100 \frac{m}{s^2}}} = \underline{7.746s}$$

Akselerasjon til partikkel nr 2:

$$\vec{a}(t) = \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hastighet til partikkel nr 2:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t) dt = \begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} Kt \\ 0 \end{bmatrix}$$

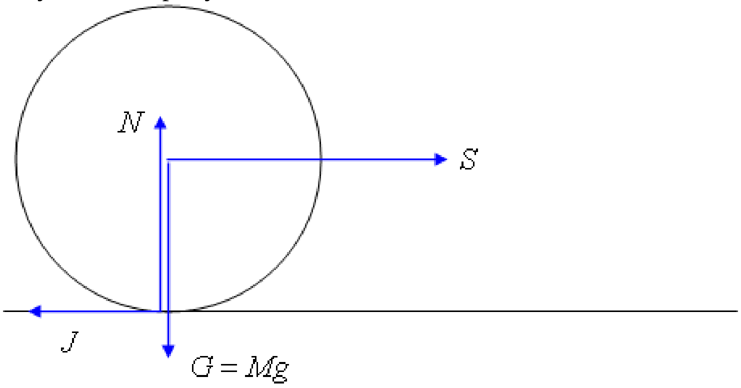
Posisjon til partikkel nr 2:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t) dt = \begin{bmatrix} r_{0x} \\ r_{0y} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} r_{0x} \\ r_{0y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t v_x dt \\ \int_0^t v_y dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{0x} \\ r_{0y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t (Kt) dt \\ \int_0^t 0 dt \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} K t^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} K t^2 \\ y_2 \end{bmatrix}}$$

Bestemmelse av akselerasjon K for kollisjon
(begge partiklene må være i samme x-posisjon ved tiden t_k):

$$r_{0x} + \frac{1}{2} A t_k^{\;2} + \frac{B}{C} \sin(C t_k) = \frac{1}{2} K t_k^{\;2}$$
$$2 C r_{0x} + A C t_k^{\;2} + 2 B \sin(C t_k) = C K t_k^{\;2}$$
$$K = \frac{2 C r_{0x} + A C t_k^{\;2} + 2 B \sin(C t_k)}{C t_k^{\;2}}$$
$$= \frac{2 \cdot 2.00 s^{-1} \cdot 0m + 0.500 \frac{m}{s^2} \cdot 2.00 s^{-1} \cdot (7.746s)^2 + 2 \cdot 2.00 \frac{m}{s^2} \sin(2.00 s^{-1} \cdot 7.746s)}{2.00 s^{-1} \cdot (7.746s)^2}$$
$$= 0.50714289 \frac{m}{s^2} = \underline{\underline{0.51 \frac{m}{s^2}}}$$

2. a) Alle ytre krefter på sylinderen:



S	Snorkraft (oppgitt i oppgaven)
G= mg	Tyngden av sylinderen (kraften på sylinderen fra jorden)
N	Normalkraft (vertikalkomponenten av kraften på sylinderen fra underlaget)
J	Friksjon (horisontalkomponenten av kraften på sylinderen fra underlaget)

b) Akselerasjonen av loddet:

$\tau_Q = RS$ Kraftmoment (def) på sylinderen (momentakse i kontaktpunkt)

$\tau_Q = I_Q\alpha$ Kraftmomentlov (momentakse i kontaktpunkt)

$I_Q = I_{cm} + Md^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$ Treghetsmoment mht akse gjennom kontaktpunkt

$a_{CM} = R\alpha$ Sammenheng mellom akselerasjon til massesenteret og vinkelakselerasjon

$\Downarrow$

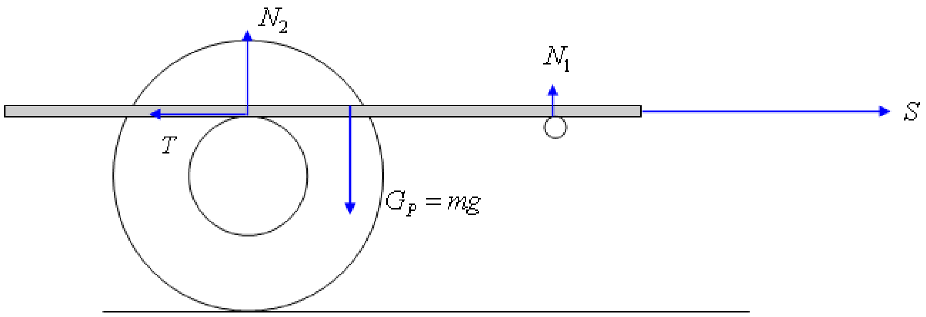
$$a_{cm} = R\alpha = R\frac{\tau_Q}{I_Q} = R\frac{RS}{\frac{3}{2}MR^2} = \underline{\underline{\frac{2}{3}\frac{S}{M}}}$$

c) Friksjon:

$S - J = Ma_{cm}$ Newtons 2. lov (horisontalt) på sylinderen

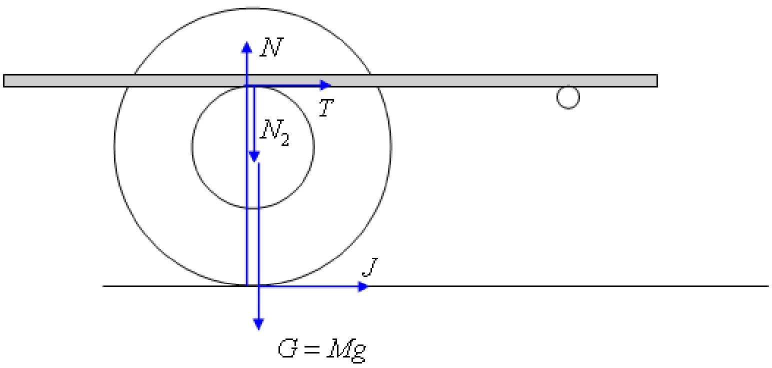
$$J = S - Ma_{cm} = \mathrm{S} - \mathrm{M}\frac{2}{3}\frac{S}{M} = S - \frac{2}{3}S = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}S$$

d) Ytre krefter på planken:



S	Snorkraft (oppgitt i oppgaven)
$G_P = mg$	Tyngden av planken (kraften på planken fra jorden)
N_1	Normalkraft (vertikalkomponenten av kraften på planken fra støttehjulet)
N_2	Normalkraft (vertikalkomponenten av kraften på planken fra sylinderen)
T	Friksjon (horisontalkomponenten av kraften på planken fra sylinderen)

Ytre krefter på sylinderen:



$G_P = mg$	Tyngden av sylinderen (kraften på sylinderen fra jorden)
N	Normalkraft (vertikalkomponenten av kraften på sylinderen fra underlaget)
J	Friksjon (horisontalkomponenten av kraften på sylinderen fra underlaget)
N_2	Normalkraft (vertikalkomponenten av kraften på sylinderen fra planken)
T	Friksjon (horisontalkomponenten av kraften på sylinderen fra planken)

e) Akselerasjonen a_P av planken:

$S - T = ma_P$	Newtons 2.lov på planken (horisontalt)
$\tau_Q = (r+R)T$	Kraftmoment (def) på sylinderen (momentakse i Q)
$\tau_Q = I_Q\alpha$	Kraftmomentlov (momentakse i massesenteret)
$I_Q = I_{cm} + Md^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$	Treghetsmoment mht akse i Q
$a_P = (r+R)\alpha$	Sammenheng mellom a, og vinkelakselerasjon

$\Downarrow$

$$a_P = (r+R)\alpha = (r+R)\frac{\tau_Q}{I_Q} = (r+R)\frac{(r+R)T}{\frac{3}{2}MR^2} = \frac{2}{3}\frac{(r+R)^2}{MR^2}T = \frac{2}{3}\frac{(r+R)^2}{MR^2}(S - ma_P)$$

$$3MR^2 a_P = 2(r+R)^2 S - 2(r+R)^2 ma_P$$

$$\left[3MR^2 + 2(r+R)^2 m\right]a_P = 2(r+R)^2 S$$

$$a_P = \frac{2(r+R)^2}{3MR^2 + 2(r+R)^2 m} = \underline{\underline{\frac{2}{\frac{3M}{\left(1+\frac{r}{R}\right)^2} + 2m}S}}$$

f) Akselerasjonen a_{cm} til massesenteret av sylinderen:

$a_P = (r+R)\alpha$	Sammenheng mellom a, for planken og vinkelakselerasjon
$a_{cm} = R\alpha$	Sammenheng mellom a_{cm} for cm og vinkelakselerasjon

$\Downarrow$

$$a_{cm} = R\alpha = R\frac{a_P}{r+R} = \frac{1}{1+\frac{r}{R}}a_P = \frac{1}{1+\frac{r}{R}}\frac{2}{\frac{3M}{\left(1+\frac{r}{R}\right)^2} + 2m}S = \underline{\underline{\frac{2}{\frac{3M}{1+\frac{r}{R}} + 2(1+\frac{r}{R})m}S}}$$

g) Akselerasjonen av planken:

$$a_P = \frac{2}{\frac{3M}{\left(1+\frac{r}{R}\right)^2} + 2m} S$$

Masseløs sylinder (M = 0):

$$a_P = \frac{2}{\frac{3 \cdot 0}{\left(1+\frac{r}{R}\right)^2} + 2m} S = \frac{2}{2m} S = \underline{\underline{\frac{S}{m}}}$$

Siden sylinderen er masseløs vil planken ikke på noen måte (hverken gjennom friksjon eller treghetsmoment av sylinderen) bli hindret i sin bevegelse, dvs planken vil bevege seg i henhold til Newtons 2. lov: $S = ma_P$, dvs $a_P = S/m$.

Masseløs planke (m = 0) og ringens radius lik null (r = 0):

$$a_P = \frac{2}{\frac{3M}{\left(1+\frac{0}{R}\right)^2} + 2 \cdot 0} S = \frac{2}{3M} S = \underline{\underline{\frac{2}{3}\frac{S}{m}}}$$

Siden planken nå er masseløs og ringen har radius null, vil vi få samme resultat som om kraften S angriper via en masseløs snor festet i sylinderens massesenter, dvs vi får samme svar som i oppgave b).

3. a) Svingetid for SHM:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2.00kg}{50.0\frac{N}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{25}}s = \underline{\underline{\frac{2\pi}{5}s}}$$

b) Lengden av den matematiske pendelen:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}} = \frac{2\pi}{5}s$$

$$L_1 = \underline{\underline{\frac{g}{25}s^2}}$$

c) Lengden av den fysiske pendelen:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL_2^{\ 2}}{mg\frac{L_2}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L_2}{3g}} = \frac{2\pi}{5}s$$

$$L_1 = \underline{\underline{\frac{3g}{50}s^2}}$$

d) Svingetid for pendelen:

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{I_3}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL_2^{\ 2} + mL_2^{\ 2}}{mg\frac{3}{2}L_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{4}{3}L_2}{\frac{3}{2}g}} = 2\pi\sqrt{\frac{8L_2}{9g}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{8\frac{3g}{50}s^2}{9g}} = \underline{\underline{\frac{4\pi\sqrt{3}}{15}s}}$$