UNIVERSITETET I AGDER
Grimstad

E K S A M E N S O P P G A V E :

FAG: FYS… Fysikk LÆRER: Fysikk : Per Henrik Hogstad

Klasse(r):	**Dato: 09.05.17**	**Eksamenstid, fra-til: 09.00 – 14.00**	
Eksamensoppgaven består av følgende	**Antall sider: 6 (inkl. forside)**	**Antall oppgaver: 4**	**Antall vedlegg: 0**
Tillatte hjelpemidler er:	**Kalkulator** **Formelsamling: Hogstad / Haugan / Gyldendal**		

<u>FYS118, FYS121, FYS122 - Fellesdel Ordinær eksamen 2017</u>

Ta dine egne forutsetninger hvis du finner uklarheter/mangler i oppgavesettet!

Poeng på hver deloppgave:

Oppg		Poeng
1	a)	3
	b)	3
	c)	3
	d)	3
2	a)	3
	b)	3
	c)	3
	d)	3
	e)	3
	f)	3
Sum		30

Poengene viser vekt-fordelingen for de enkelte del-spørsmålene.
Ved karaktersetting vektlegges selvfølgelig i tillegg en totalvurdering, bl.a. en vurdering av i hvilken grad kandidaten har kunnskaper innenfor de ulike områdene gitt i oppgavesettet.

Lykke til !

1. En partikkel beveger seg i *xy*-planet.
   Partikkelen passerer (starter) i posisjon $(x, y) = (10.0 \text{ m}, 5.00 \text{ m})$ ved tiden $t = 0$.
   Hastigheten som funksjon av tiden t er gitt ved:

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\cos(Bt) \\ C\sin(Dt) \end{bmatrix}$$

hvor

$A = 4.00\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\quad B = 2.00\ \text{s}^{-1}$ $\quad C = 3.00\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\quad \text{D} = 3.00\ \text{s}^{-1}$

a) Bestem partikkelens hastighet (*x*- og *y*-komponent) etter 9.00 sekunder.

b) Bestem partikkelens akselerasjon (*x*- og *y*-komponent) etter 9.00 sekunder.

c) Bestem partikkelens posisjon (*x*- og *y*-komponent) etter 9.00 sekunder.

d) Bestem første tidspunkt etter start (dvs etter $t = 0$) hvor partikkelen er tilbake i startposisjon $(x, y) = (10.0\ \text{m}, 5.00\ \text{m})$

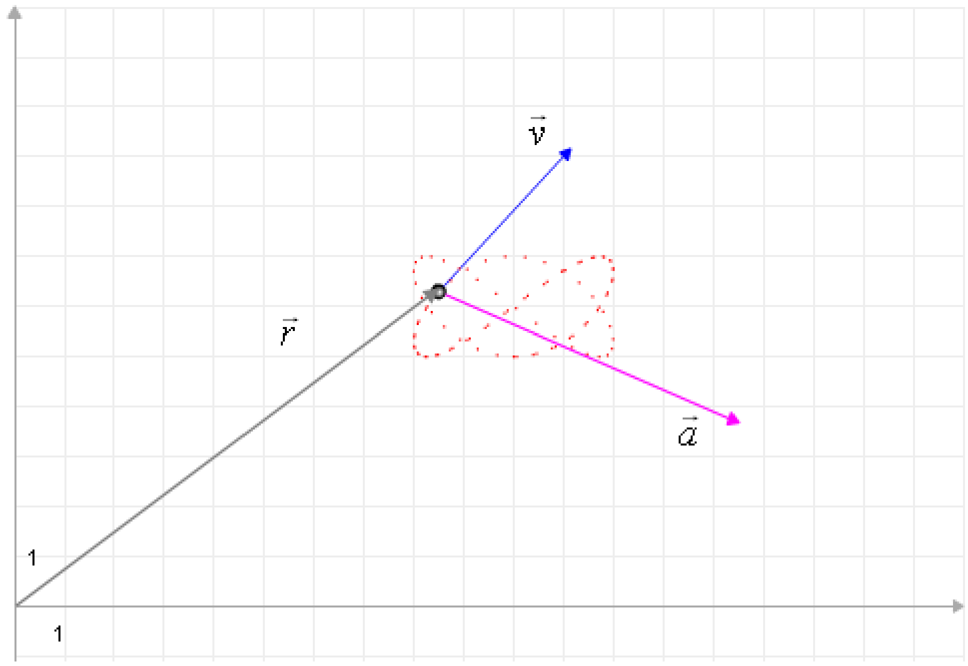


Fig 1.1

Figuren viser partikkelbanen (*x*- og *y*-koordinater),
posisjonsvektor, hastighetsvektor og akselerasjonsvektor etter 9.00 sekunder.
For posisjon svarer 1 rute til 1 m, for hastighet 1 m/s og for akselerasjon 1 m/s^2.

2. Et massivt hjul (eller massiv sylinder) med masse M_H og radius R ruller på et horisontalt underlag.
Til hjulet er festet en masseløs ring med radius r og samme sentrum som hjulet.
Rundt denne ringen er viklet en masseløs tråd.
Vi drar i denne tråden med en konstant horisontal kraft S.
Det er tilstrekkelig friksjon mellom hjulet og underlaget til at hjulet ruller uten å gli.

En kloss med masse M_K er festet med en masseløs horisontal snor til senteraksen O av hjulet (se fig 2.1). Friksjonen mellom klossen og underlaget er så liten at vi ser bort fra denne.

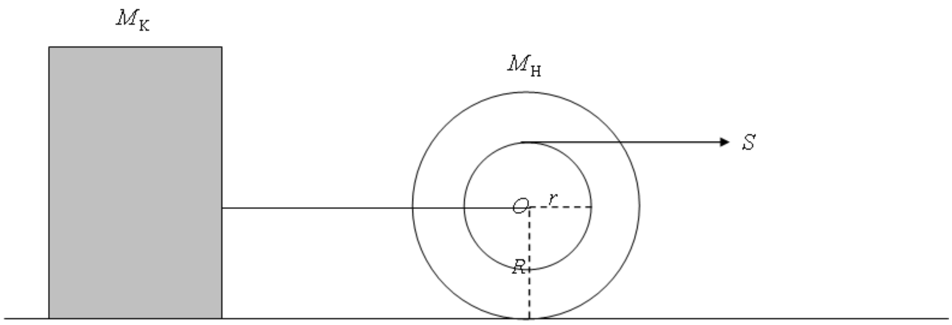


Fig 2.1

a) Tegn inn og forklar alle ytre krefter som virker på klossen.
   Tegn deretter inn (i en ny figur) og forklar alle ytre krefter som virker på systemet bestående av hjulet og ringen.

b) Bestem akselerasjonen til klossen uttrykt ved en eller flere av størrelsene M_K, M_H, r, R og S.

c) Bestem friksjonskraften på hjulet fra underlaget uttrykt ved en eller flere av størrelsene M_K, M_H, r, R og S.

d) La oss nå anta at massen av klossen er lik massen av hjulet, dvs $M_K = M_H = M$.
   Bestem for hvilke verdier av ring-radien r uttrykt ved hjulradien R friksjonskraften på hjulet fra underlaget peker mot venstre, er lik null eller peker mot høyre.

e) La oss nå anta at $M_K = M_H = M = 2.0$ kg, $R = 0.50$ m, $r = R/2 = 0.25$ m og $S = 5.00$ N.
   Bestem vinkelhastighet til hjulet etter 2.00 sekunder. Hjulet starter i ro.

f) La oss nå anta at tråden er viklet motsatt vei på ringen og at klossen er koblet til denne tråden.
   Videre antar vi at vi drar med en konstant horisontal kraft S i sentret av hjulet (se fig 2.2).
   Under bevegelsen vikles tråden fra klossen inn på ringen uten å gli mot ringen.
   Vi antar igjen de generelle uttrykkene massene, radiene og snorkraften S, dvs vi ser nå bort fra de spesielle verdiene som er gitt i deloppgavene d) og e).
   Bestem akselerasjonen til klossen uttrykt ved en eller eller flere av størrelsene M_K, M_H, r, R og S.
   Kontroller de to beregnede akselerasjonene i b) og f) ved å se at disse er like for $r = 0$.

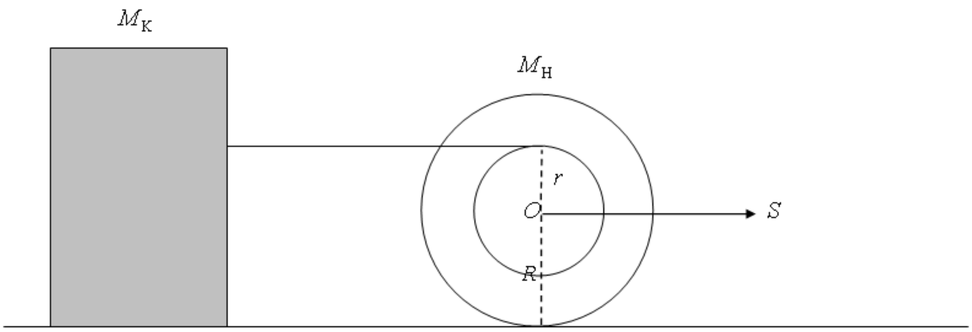


Fig 2.2

Løsning:

1. Hastighet som funksjon av tiden:

$$\vec{v}(t)=\begin{bmatrix}v_x\\v_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A\cos(Bt)\\C\sin(Dt)\end{bmatrix}\quad \text{hvor}\quad A=4.00\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\qquad B=2.00\ \text{s}^{-1}\qquad C=3.00\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\qquad D=3.00\ \text{s}^{-1}$$

a) Hastighet etter 9.00 sekunder:

$$\vec{v}(9.00\,\text{s})=\begin{bmatrix}v_x\\v_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4.00\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\cos(2.00\,\text{s}^{-1}\cdot 9.00\,\text{s})\\3.00\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\sin(3.00\,\text{s}^{-1}\cdot 9.00\,\text{s})\end{bmatrix}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}2.64\\2.87\end{bmatrix}\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

b) Akselerasjon etter 9.00 sekunder:

$$\vec{a}(t)=\dot{\vec{v}}(t)=\begin{bmatrix}\dot{v}_x\\\dot{v}_y\end{bmatrix}=\underline{\begin{bmatrix}-AB\sin(Bt)\\CD\cos(Dt)\end{bmatrix}}$$

$$\vec{a}(2.00s)=\begin{bmatrix}-4.00\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 2.00\,\text{s}^{-1}\cdot\sin(2.00\,\text{s}^{-1}\cdot 9.00\,\text{s})\\0\end{bmatrix}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}6.01\\-2.63\end{bmatrix}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

c) Posisjon etter 9.00 sekunder:

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\int_0^t\vec{v}(t)dt=\begin{bmatrix}r_{0x}\\r_{0y}\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}v_x\\v_y\end{bmatrix}dt=\begin{bmatrix}r_{0x}\\r_{0y}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\int_0^t v_x dt\\\int_0^t v_y dt\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_{0x}+\int_0^t(A\cos(Bt))dt\\r_{0y}+\int_0^t(C\sin(Dt)dt\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}r_{0x}+\frac{A}{B}\sin(Bt)\\r_{0y}-\frac{C}{D}\cos(Dt)\end{bmatrix}_0^t=\underline{\begin{bmatrix}r_{0x}+\frac{A}{B}\sin(Bt)\\r_{0y}+\frac{C}{D}(1-\cos(Dt))\end{bmatrix}}$$

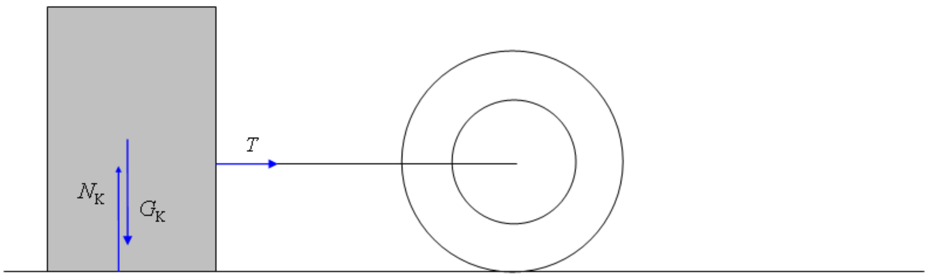
$$\vec{r}(9.00\,\text{s})=\begin{bmatrix}10.00\,\text{m}+\frac{2.00\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2.00\,\text{s}^{-1}}\sin(2.00\,\text{s}^{-1}\cdot 9.00\,\text{s})\\5.00\,\text{m}+\frac{3.00\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{3.00\,\text{s}^{-1}}(1-\cos(3.00\,\text{s}^{-1}\cdot 9.00\,\text{s}))\end{bmatrix}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}8.50\\6.29\end{bmatrix}\text{m}}}$$

d) Første tidspunkt etter start hvor partikkelen er tilbake i startposisjon:

$$\begin{bmatrix}r_{0x}+\frac{A}{B}\sin(Bt)\\r_{0y}+\frac{C}{D}(1-\cos(Dt))\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_{0x}\\r_{0y}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}Bt=n\cdot\pi & n=1,2,3,...\\Dt=m\cdot 2\pi & m=1,2,3,...\end{cases}$$

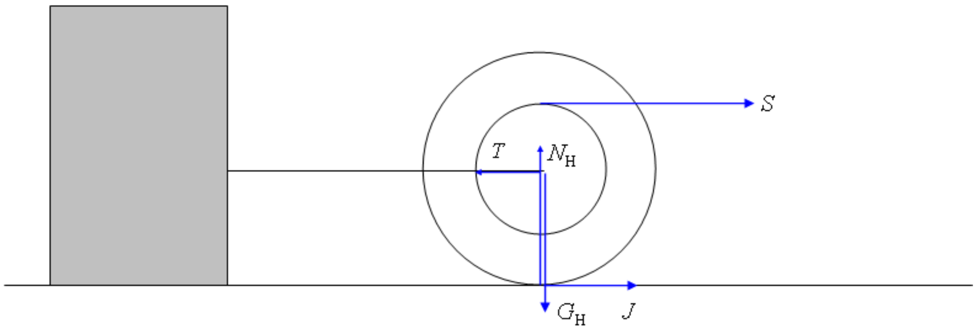
$$\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{n}{B}\cdot\pi=\frac{1}{2}\pi\,\text{s},\frac{2}{2}\pi\,\text{s},\frac{3}{2}\pi\,\text{s},\frac{4}{2}\pi\,\text{s},...\\t=\frac{m}{D}\cdot 2\pi=\frac{2}{3}\pi\,\text{s},\frac{4}{3}\pi\,\text{s},\frac{6}{3}\pi\,\text{s},\frac{8}{3}\pi\,\text{s},...\end{cases}\Rightarrow\underline{\underline{t=2\pi\,\text{s}}}$$

2. a) Alle ytre krefter på klossen:



T	Snorkraft på klossen.
$G_K = M_K g$	Tyngden av klossen (kraften på klossen fra jorden).
N_K	Normalkraft (vertikalkomponenten av kraften på klossen fra underlaget) Klossen har ingen vertikal bevegelse. Akselerasjonen vertikalt er derfor lik null. Summen av kreftene vertikalt er derfor lik null og N_K er motsatt lik G_K.

Alle ytre krefter på hjulet (inkl. ringen):



S	Snorkraft (mot høyre) på hjulet (oppgitt i oppgaven).
T	Snorkraft (mot ventre) på hjulet.
$G_H = M_H g$	Tyngden av hjulet (kraften på hjulet fra jorden).
N_H	Normalkraft (vertikalkomponenten av kraften på hjulet fra underlaget) Hjulet har ingen vertikal bevegelse. Akselerasjonen vertikalt er derfor lik null. Summen av kreftene vertikalt er derfor lik null og N_H er motsatt lik G_K.
J	Friksjon (horisontalkomponenten av kraften på hjulet fra underlaget). Retningen av denne friksjonskraften er avhengig av r, R, M_K og M_H. Foreløpig retning er tegnet mot høyre.

b) Akselerasjonen av klossen:
Klossen og massesenteret av hjulet har samme akselerasjon a.

$T = M_K a$ Newtons 2.lov horisontalt på klossen

$S_2 + J - T = M_H a$ Newtons 2.lov horisontalt på systemet hjul + ring

$\tau_P = (R+r)S - RT$ Kraftmoment (def) på hjulet (momentakse i kontaktpunkt)

$\tau_P = I_P \alpha$ Kraftmomentlov (momentakse i kontaktpunkt)

$I_P = I_{cm} + Md^2 = \frac{1}{2}M_H R^2 + M_H R^2 = \frac{3}{2}M_H R^2$ Treghetsmoment mht akse gjennom kontaktpunkt

$a = R\alpha$ Sammenheng mellom akselerasjon til massesenteret og vinkelakselerasjon

$\Downarrow$

$$a = R\alpha = R\frac{\tau_P}{I_P} = R\frac{(R+r)S - RT}{\frac{3}{2}M_H R^2} = R\frac{(1+\frac{r}{R})RS - RT}{\frac{3}{2}M_H R^2} = \frac{2}{3}\frac{(1+\frac{r}{R})S - T}{M_H} = \frac{2}{3}\frac{(1+\frac{r}{R})S - M_K a}{M_H}$$

$$3M_H a = 2(1+\frac{r}{R})S - 2M_K a$$

$$(2M_K + 3M_H)a = 2(1+\frac{r}{R})S$$

$$\underline{\underline{a = \frac{2(1+\frac{r}{R})}{2M_K + 3M_H}S}}$$

c) Friksjon:

$S + J - T = M_H a$ Newtons 2.lov horisontalt på systemet hjul + ring

$\Downarrow$

$$J = M_H a + T - S = M_H a + M_K a - S = (M_H + M_K)a - S = (M_H + M_K)\frac{2(1+\frac{r}{R})}{2M_K + 3M_H}S - S$$

$$= \underline{\underline{\left[\frac{M_H + M_K}{2M_K + 3M_H}2(1+\frac{r}{R}) - 1\right]S}}$$

d) Friksjonsretning:

$$J = \left[\frac{M_H + M_K}{2M_K + 3M_H}2(1+\frac{r}{R}) - 1\right]S = \left[\frac{M + M}{2M + 3M}2(1+\frac{r}{R}) - 1\right]S = \left[\frac{2M}{5M}2(1+\frac{r}{R}) - 1\right]S = \left[\frac{4}{5}(1+\frac{r}{R}) - 1\right]S$$

$$J = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{5}(1+\frac{r}{R}) - 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{r}{R} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow r = \frac{1}{4}R$$

Friksjon mot venstre $J < 0: \quad r \in [0, \frac{1}{4}R>$

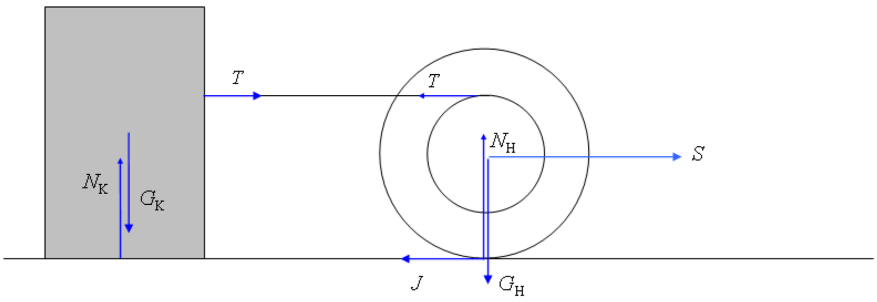
Friksjonsløst $J = 0: \quad r = \frac{1}{4}R$

Friksjon mot høyre $J > 0: \quad r \in <\frac{1}{4}R, R]$

e) Vinkelakselerasjon:

$$\omega = \alpha t = \frac{a}{R}t = \frac{1}{R}\frac{2(1+\frac{r}{R})}{2M_K + 3M_H}St = \frac{1}{0.50m}\cdot\frac{2(1+\frac{0.25m}{0.50m})}{2\cdot 2.00kg_K + 3\cdot 2.00kg}\cdot 5.00N \cdot 2.00s = \underline{\underline{6.00s^{-1}}}$$

f) Akselerasjon til klossen i situasjon 2:



Akselerasjonen til klossen er a.
Akselerasjonen til massesenteret av hjulet er a_{HCM}.
Denne gang må friksjonen ha retning mot venstre (eneste kraft som kan vi kraftmomentbidrag til rotasjon med klokken mht momentakse gjennom massesenteret.

$T = M_{\mathrm{K}} a$ Newtons 2.lov horisontalt på klossen

$S - J - T = M_H a_{\mathrm{HCM}}$ Newtons 2.lov horisontalt på systemet hjul + ring

$\tau_P = RS - (R+r)T$ Kraftmoment (def) på hjulet (momentakse i kontaktpunkt)

$\tau_P = I_P \alpha$ Kraftmomentlov (momentakse i kontaktpunkt)

$I_P = I_{cm} + Md^2 = \frac{1}{2} M_{\mathrm{H}} R^2 + M_{\mathrm{H}} R^2 = \frac{3}{2} M_{\mathrm{H}} R^2$ Treghetsmoment mht akse gjennom kontaktpunkt

$a_{\mathrm{HCM}} = R\alpha$

$a = (R+r)\alpha$ Sammenheng mellom akselerasjon til massesenteret og vinkelakselerasjon

$\Downarrow$

$$a = (R+r)\alpha = (R+r)\frac{\tau_P}{I_P} = (R+r)\frac{RS-(R+r)T}{\frac{3}{2}M_{\mathrm{H}}R^2} = (1+\frac{r}{R})R\frac{RS-(1+\frac{r}{R})RT}{\frac{3}{2}M_{\mathrm{H}}R^2}$$

$$= \frac{2}{3}(1+\frac{r}{R})\frac{S-(1+\frac{r}{R})T}{M_{\mathrm{H}}} = \frac{2}{3}(1+\frac{r}{R})\frac{S-(1+\frac{r}{R})M_{\mathrm{K}}a}{M_{\mathrm{H}}}$$

$$3M_{\mathrm{H}}a = 2(1+\frac{r}{R})S - 2(1+\frac{r}{R})^2 M_{\mathrm{K}} a$$

$$(2(1+\frac{r}{R})^2 M_{\mathrm{K}} + 3M_{\mathrm{H}})a = 2(1+\frac{r}{R})S$$

$$\underline{\underline{a = \frac{2(1+\frac{r}{R})}{2(1+\frac{r}{R})^2 M_{\mathrm{K}} + 3M_{\mathrm{H}}} S}}$$

Kontroll av at svarene i b) og f) stemmer overens for r = 0:

$$\text{Fra b):} \quad a = \frac{2(1+\frac{r}{R})}{2M_{\mathrm{K}} + 3M_{\mathrm{H}}} S = \frac{2(1+\frac{0}{R})}{2M_{\mathrm{K}} + 3M_{\mathrm{H}}} S = \underline{\frac{2}{2M_{\mathrm{K}} + 3M_{\mathrm{H}}} S}$$

$$\text{Fra f):} \quad a = \frac{2(1+\frac{r}{R})}{2(1+\frac{r}{R})^2 M_{\mathrm{K}} + 3M_{\mathrm{H}}} = \frac{2(1+\frac{0}{R})}{2(1+\frac{0}{R})^2 M_{\mathrm{K}} + 3M_{\mathrm{H}}} = \underline{\frac{2}{2M_{\mathrm{K}} + 3M_{\mathrm{H}}} S}$$

Svarene fra b) og f) er i overensstemmelse for $r = 0$.