

UNIVERSITETET I AGDER
Grimstad

E K S A M E N S O P P G A V E :

FAG: FYS... Fysikk

LÆRER: Fysikk : Per Henrik Hogstad

Klasse(r):	Dato: 02.10.17	Eksamenstid, fra-til: 09.00 – 14.00	
Eksamensoppgaven består av følgende	Antall sider: 4 (inkl. forside)	Antall oppgaver: 2	Antall vedlegg: 0
Tillatte hjelpemidler er:	Kalkulator Formelsamling: Hogstad / Haugan / Gyldendal		

FYS... - Fellesdel - Utsatt eksamen 2017

Ta dine egne forutsetninger hvis du finner uklarheter/mangler i oppgavesettet!

Poeng på hver deloppgave:

Oppg	Poeng
1 a)	3
b)	3
2 a)	3
b)	3
c)	3
d)	3
e)	3
f)	3
g)	3
h)	3
3 a)	3
b)	3
c)	3
d)	3
e)	3

Sum	45

Poengene viser vekt-fordelingen for de enkelte del-spørsmålene.
Ved karaktersetning vektlegges selvfølgelig i tillegg en totalvurdering,
bl.a. en vurdering av i hvilken grad kandidaten har kunnskaper innenfor
de ulike områdene gitt i oppgavesettet.

Lykke til !

Fellesdel:

1. En partikkel beveger seg i rommet (3D-bevegelse) slik at hastigheten v som funksjon av tiden t er gitt ved:

$$\vec{v}(t) = [At, B \sin(Ct), D \cos(Et)]$$

hvor A, B, C, D og E er konstanter.

Partikkelen passerer posisjonen (p_1, p_2, p_3) ved tiden $t = 0$.

- a) Bestem partikkelens akselerasjon ved tiden t .
- b) Bestem partikkelens posisjon ved tiden t .

2. Det kan være mange interessante spørsmål i tilknytning til bruk av en bowlingkule:
 Hvilke faktorer (masse, radius, friksjon, ...) påvirker bevegelsen til bowlingkulen?
 Hvordan er fordelingen av rulling/glidning mot underlaget?
 Hvordan er bevegelsen og hva er hastigheten når bowlingkula treffer kjeglene?
 ...

I denne oppgaven skal vi begrense oss til noen få spørsmål.

Vi har en massiv bowlingkule (jevn massefordeling) med masse M og radius R .
 Massesenteret til bowlingkulen har horisontal hastighet v_0 og ingen rotasjon i det den ved tiden $t = 0$ forlater hånden og beveger seg på det horisontale underlaget (gulvet).
 Ved glidende friksjon er friksjonskraften J proporsjonal med normalkraften N , dvs $J = \mu N$ hvor μ er friksjonskoeffisienten for glidende friksjon. Pga friksjonen vil bowlingkulen gli mot underlaget samtidig som den begynner å rulle når den treffer gulvet.

I deloppgavene fra og med a) til og med g) skal vi unngå å benytte betraktninger knyttet til angulært moment (spinn). Derimot skal vi gjøre noen beregninger med angulært moment (spinn) i deloppgave h).

- Tegn inn og forklar alle ytre krefter som virker på bowlingkulen straks etter at den har forlatt hånden og har begynt bevegelsen langs det horisontale underlaget.
- Skriv opp og forklar ligninger som er nødvendige for å beskrive bowlingkulens bevegelse (translasjon og rotasjon) mens bowlingkulen glir/ruller langs underlaget..
- Bestem bowlingkulens akselerasjon og vinkelakselerasjon mens den glir/ruller langs underlaget.
- Bestem bowlingkulens hastighet og vinkelhastighet som funksjon av tiden mens den glir/ruller langs underlaget.
- Bestem ved hvilket tidspunkt t_1 bowlingkulen vil slutte å gli mot underlaget, dvs tidspunktet for overgang til ren rulling.
- Hvor langt har bowlingkulen beveget seg i det den slutter å gli langs underlaget?
- Bestem hastigheten til bowlingkulen i det øyeblikket bowlingkulen slutter å gli langs underlaget.
- Angulært moment (spinn) L er definert ved følgende:

$$\vec{L} = \vec{r} \times M\vec{v}$$

Spinnsatsen mht et gitt punkt P på et stivt legeme er gitt ved:

$$\dot{\vec{L}}_P = -\vec{v}_P \times M\vec{v}_{cm/P} + \vec{\tau}_P$$

hvor vektoren v_P er hastigheten til punktet P , vektoren $v_{cm/P}$ er hastigheten til massesenteret relativt til P og vektoren τ_P er kraftmomentet mht P .

Spesielt gjelder følgende mht et punkt P som er i ro på et stivt legeme:

$$\dot{\vec{L}}_P = \vec{\tau}_P$$

Benytt spinnsatsen til å svare på spørsmål g) ovenfor, dvs benytt spinnsatsen til å bestemme hastigheten til bowlingkulen i det øyeblikket bowlingkulen slutter å gli langs underlaget.
 Hva vil skje med bowlingkulen etter at den har sluttet å gli langs underlaget? Begrunn svaret.

Løsning:

1. Hastigheten som funksjon av tiden t er gitt ved:

$$\vec{v}(t) = [At, B \sin(Ct), D \cos(Et)]$$

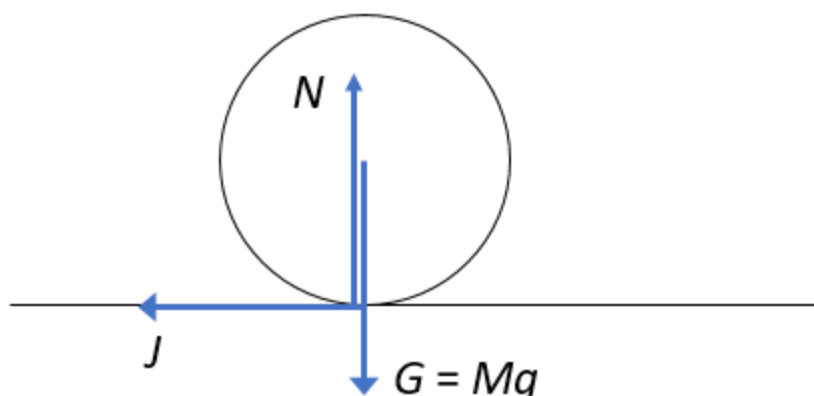
a) Akselerasjon som funksjon av tiden:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \underline{\underline{[A, BC \cos Ct, -DE \sin(Et)]}}$$

b) Posisjon som funksjon av tiden:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t) dt \\ &= [p_1, p_2, p_3] + \left[\frac{1}{2} At^2, -\frac{B}{C} \cos(Ct) + \frac{B}{C}, \frac{D}{E} \sin(Et) \right] \\ &= \underline{\underline{\left[p_1 + \frac{1}{2} At^2, p_2 + \frac{B}{C} (1 - \cos(Ct)), p_3 + \frac{D}{E} \sin(Et) \right]}} \end{aligned}$$

2. a) Ytre krefter som virker på bowlingkulen:



$G = Mg$: Tyngden av bowlingkulen (kraften på bowlingkulen fra jorden).

N : Normalkraften (vertikalkomponenten av kraften på bowlingkulen fra underlaget). Siden bowlingkulen ikke har noen vertikal bevegelse, må den vertikale vektorsummen av tyngden og normalkraften være lik nullvektor. Derfor må normalkraften i størrelse være like stor som tyngden (men motsatt rettet).

J : Friksjon (horisontalkomponenten av kraften på bowlingkulen fra underlaget). Siden bowlingkulen treffer underlaget med en hastighet rettet mot høyre, samtidig som bowlingkulen i utgangspunktet ikke roterer, så vil horisontalkomponenten av kraften på underlaget fra bowlingkulen ha retning mot høyre. Motkraften J til denne kraften, dvs horisontalkomponenten av kraften på bowlingkulen fra underlaget, vil da ha retning mot venstre.

b) Ligninger til beskrivelse av bowlingkulens bevegelse (translasjon + rotasjon) mens sylinderen glir mot underlaget (positiv retning mot høyre og positiv rotasjonsretning med klokken).

Velger momentakse gjennom massesenteret (der gjelder kraftmomentloven uavhengig av bevegelse, i bowlingkulens kontaktpunkt med underlaget gjelder kraftmoment-loven kun hvis bowlingkulen ruller uten å gli):

$J = \mu N$	Friksjonskraft (J er her absoluttverdien av friksjonen)
$-J = Ma_{cm}$	Newtons 2.lov horisontalt
$N - Mg = 0$	Newtons 2.lov vertikalt
$\tau_{cm} = JR$	Kraftmoment om cm (def)
$\tau_{cm} = I_{cm}\alpha$	Kraftmomentloven om cm
$I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$	Treghetsmoment om cm

c) Akselerasjon og vinkelakselerasjon:

$$a_{cm} = -\frac{J}{M} = -\frac{\mu N}{M} = -\frac{\mu Mg}{M} = -\underline{\underline{\mu g}}$$

$$\alpha = \frac{\tau_{cm}}{I_{cm}} = \frac{JR}{\frac{2}{5}MR^2} = \frac{\mu N}{\frac{2}{5}MR} = \frac{\mu Mg}{\frac{2}{5}MR} = \underline{\underline{\frac{5}{2} \frac{\mu g}{R}}}$$

d) Hastighet og vinkelhastighet som funksjon av tiden:

Siden akselerasjonen til massesenteret og vinkelakselerasjonen begge er konstante (uavhengig av tiden t , se oppgave c)), kan vi benytte veilovene ved konstant akselerasjon og rotasjonslovene ved konstant vinkelakselerasjon.

$$v_{cm} = v_0 + a_{cm}t = v_0 - \underline{\underline{\mu g t}}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \frac{5}{2} \frac{\mu g}{R} t = \underline{\underline{\frac{5}{2} \frac{\mu g}{R} t}}$$

e) Tidspunkt t_1 for gli-stopp mot underlaget:

Når bowlingkulen slutter å gli mot underlaget, har vi følgende sammenheng mellom hastighet og vinkelhastighet: $v_{cm} = R\omega$

$$v_{cm} = R\omega$$

$$v_0 - \mu g t_1 = R \frac{5}{2} \frac{\mu g}{R} t_1$$

$$t_1 = \underline{\underline{\frac{2}{7} \frac{v_0}{\mu g}}}$$

f) Strekingen som bowlingkulen har beveget seg før den slutter å gli mot underlaget:

$$s_{cm} = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_{cm} t_1^2 = v_0 \frac{2}{7} \frac{v_0}{\mu g} - \frac{1}{2} \mu g \left(\frac{2}{7} \frac{v_0}{\mu g} \right)^2 = \underline{\underline{\frac{12}{49} \frac{v_0^2}{\mu g}}}$$

g) Hastigheten til bowlingkulen i det den slutter å gli mot underlaget:

$$v_{cm} = v_0 + a_{cm} t_1 = v_0 - \mu g \frac{2}{7} \frac{v_0}{\mu g} = \underline{\underline{\frac{5}{7} v_0}}$$

h) La P være bowlingkulens kontaktpunkt med underlaget.

Siden alle ytre krefter som virker på bowlingkula når den ruller/glir mot underlaget går (eventuelt forlenget) gjennom P , vil kraftmomentet på bowlingkula mht en akse gjennom P være lik null. Dermed vil siste ledd på høyre side i spinnsatsen være lik nullvektor.

Videre vil hastigheten til punktet P ikke ha noen vertikalkomponent, dvs v_P vil være parallell med $v_{cm/P}$. Dermed vil første ledd på høyre side i spinnsatsen være lik nullvektor pga kryssproduktet mellom to parallelle vektorer.

Den deriverte av det angulære momentet (spinn) er derfor lik nullvektor.

Derfor vil det angulære momentet mht P i følge spinnsatsen være bevart under hele bevegelsen.

Merk at under denne bevegelsen (når bowlingkula både ruller og glir) vil mekanisk energi ikke være bevart (friksjonen utfører et arbeid når bowlingkula glir),

mens angulært moment (spinn) er bevart. Det angulære momentet består av to deler, en del som er knyttet til translasjon av massesenteret og en del som er knyttet til rotasjon om massesenteret.

Det angulære momentet mht P i det bowlingkula kommer i berøring med underlaget er gitt ved:

$$L_1 = RMv_0$$

Så lenge bowlingkula er utsatt for en friksjonskraft når bowlingkula glir, vil vi ha et kraftmoment mht massesenteret, og i følge kraftmomentloven $\tau = I\alpha$ vil vi da ha en positiv vinkelakselerasjon (vinkelhastigheten vil øke), slik at på ett eller annet tidspunkt vil vinkelhastigheten være så stor at bowlingkula vil rulle uten å gli.

Det angulære momentet mht P i det bowlingkula slutter å gli mot underlaget (hastigheten til punktet P har da hastighetsvektor lik nullvektor og vi har en ren rotasjon om P):

$$L_2 = I_P\omega$$

Med bevaring av angulært moment og $v = R\omega$ når vi kun har rulling uten å gli, får vi:

$$L_1 = L_2$$

$$RMv_0 = \frac{7}{5}MR^2 \frac{v_{cm}}{R}$$

$$v_{cm} = \frac{5}{7}v_0$$

Når bowlingkula først har sluttet å gli, vil den fortsette å rulle uten å gli.

En eventuell friksjonskraft den ene eller den andre veien, vil igjen endre vinkelhastigheten slik at vi får ren rulling, dvs friksjonskraften vil opphøre når bowlingkula slutter å gli.

Dermed har vi ikke lenger noen netto ytre kraft på bowlingkula, dvs bowlingkulens massesenter fortsetter med den konstante hastigheten v_{cm} beregnet ovenfor.

Siden bowlingkula ruller videre uten å gli, gjelder fortsatt $\omega = v_{cm}/R$, dvs vinkelhastigheten vil være uendret. Bowlingkula fortsetter altså med konstant hastighet og konstant vinkelhastighet etter at bowlingkula har sluttet å gli mot underlaget. Bowlingkula treffer altså bowlingkjeglene med hastigheten $v_{cm} = 5/7 \cdot v_0$. Hastigheten som bowlingkula treffer bowlingkjeglene med er altså kun avhengig av bowlingkulens utgangshastighet og uavhengig av friksjonskraft, og uavhengig av bowlingkulens masse og radius. Derimot er vinkelhastigheten som bowlingkula treffer bowlingkjeglene med avhengig av bowlingkulens radius.

Teori:

Angulært moment: <http://grimstad.uia.no/perhh/phh/fag/fysikk/ff0300/f/k10/026.htm>

AM mht fast akse: <http://grimstad.uia.no/perhh/phh/fag/fysikk/ff0300/f/k10/027.htm>

AM mht et punkt P: http://grimstad.uia.no/perhh/phh/fag/fysikk/ff0300/f/k10/027_002.htm

Spinnsatsen: <http://grimstad.uia.no/perhh/phh/fag/fysikk/ff0300/f/k10/029.htm>