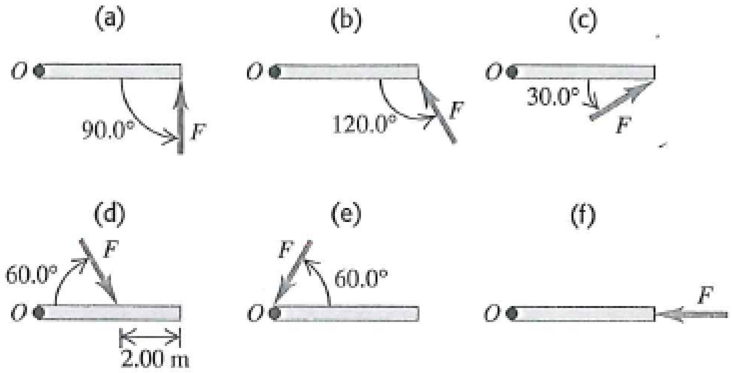
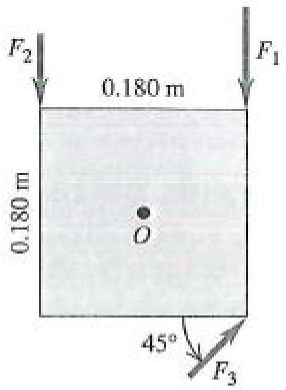
Kap 10 Dynamikk av rotasjons-bevegelse

10.1 Bestem kraftmomentet (størrelse og retning) om en akse normalt på papirplanet gjennom O som kraften F i hver av situasjonene er årsak til.
Objektet som F virker på har i hvert av tilfellene lengde 4.00 m og kraften F = 10.0 N.



10.3 En kvadratisk metallplate med side 0.180 m kan rotere om en akse normalt på platen gjennom midtpunktet O (se fig 10-39 i læreboken).
Bestem netto kraftmoment om denne aksen forårsaket av de tre kreftene vist på figuren når F_1 = 18.0N, F_2 = 26.0N og F_3 = 14.0N.

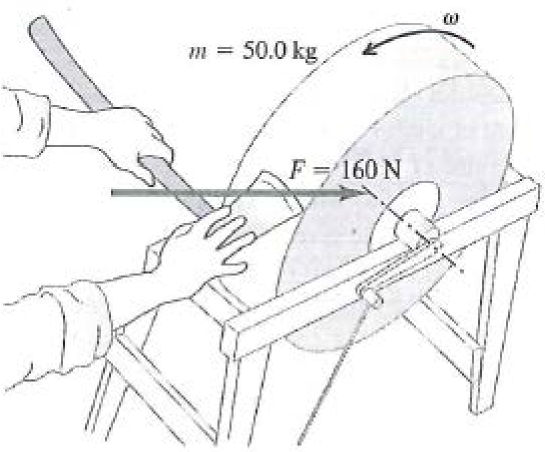


G
10.6 Et svinghjul i en maskin har treghetsmoment 3.50 kgm^2 om sin rotasjonsakse.

a) Hvilket konstant kraftmoment kreves for å få svinghjulet opp i en rotasjonshastighet på 600 omdreininger pr minutt i løpet av 8.00 sekunder når svinghjulet starter i ro?

b) Hva er svinghjulets kinetiske energi etter at det har kommet opp i rotasjonshastigheten nevnt i a) ?

10.11 En slipestein med diameter 0.520 m og masse 50.0 kg roterer med 850 omdreininger pr minutt.
Vi presser en øks mot slipesteinen med en normalkraft på 160 N og slipesteinen kommer til ro i løpet av 7.50 sekunder.
Bestem friksjonskoeffisienten mellom øksen og slipesteinen.
Se bort fra friksjon mellom slipesteinaksen og dens oppheng.

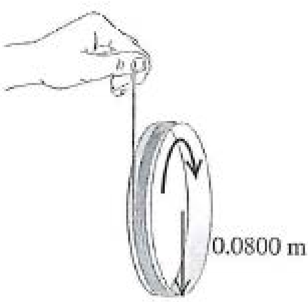


10.15 En snor er viklet flere ganger rundt periferien til en ring med radius 0.0800 m og masse 0.180 kg.
Den frie enden av snoren holdes i ro og ringen slippes fra ro.

a) Bestem strekket i snoren mens ringen faller og snoren vikles av.

b) Bestem tiden det tar for ringen å falle 0.750 m.

c) Bestem ringens rotasjonshastighet etter at den har falt 0.750 m.



G
10.26 Svinghjulet til en stor motor har massen 30.0 kg og treghetsmoment 67.5 kgm^2 om sin rotasjonsakse.
Motoren utøver et konstant kraftmoment på 600 Nm og svinghjulet starter i ro.

a) Hva er vinkelakselerasjonen til svinghjulet?

b) Hva er svinghjulets vinkelhastighet etter 4.00 omdreininger?

c) Hvor mye arbeid er utført av motoren i løpet av de 4.00 første omdreiningene?

d) Hva er gjennomsnittseffekten som motoren yter i løpet av de 4.00 første omdreiningene?

e) Hva er momentaneffekten til motoren i det øyeblikket svinghjulet har utført 4.00 omdreininger?

G

10.28 Bestem angulært moment til en uniform kule med radius 0.160 m og masse 5.00 kg når den roterer om en akse langs en diameter med en vinkelhastighet på 6.00 rad/s.

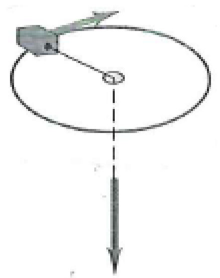
10.33 En liten kloss med masse m = 0.0250 kg ligger på en friksjonsfri, horisontal flate. Klossen er festet til en masseløs snor som passerer gjennom et lite hull i den nevnte horisontale flaten. Klossen roterer opprinnelig med en avstand på 0.300 m fra hullet og med en vinkelhastighet på 1.75 rad/s. Fra undersiden av den horisontale flaten trekker man så i snoren slik at den får en ny radius på 0.150 m. Klossen kan betraktes som en partikkel.

a) Er angulært moment bevart? Forklar.

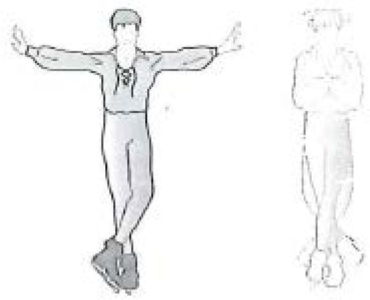
b) Hva er den nye vinkelhastigheten?

c) Bestem endring i kinetisk energi til klossen.

d) Hvor mye arbeid ble utført ved å dra i snoren?



10.34 Utstrekte hender og armer til en kunstløper på skøyter som gjør klar for et spinn, kan betraktes som to sylindre som roterer rundt armenes senter. Når armene trekkes inn og plasseres tett inntil kroppen kan de til sammen betraktes som en tynn-vegget sylinder. Hendene og armene har til sammen massen 8.0 kg. Når de er strukket ut, har de et spenn på 1.8 m. Når de er trukket inn, danner de en hul sylinder med radius 25 cm. Treghetsmomentet til resten av kroppen om rotasjonsaksen er lik 0.40 kgm^2. Beregn kunstløperens slutt-vinkelhastighet når start-vinkelhastigheten er 0. 40 omdreininger pr sekund.



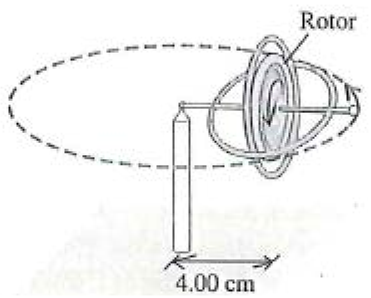
10.36 Et svingbord roterer om en fast vertikal akse. En omdreining tar 6.00 s. Bordets treghetsmoment om denne aksen er 1200 kgm^2. Et barn med masse 40.0 kg står opprinnelig i ro på midten av bordet og løper så langs en radius. Vi betrakter barnet som en punktpartikkel. Hva er bordets vinkelhastighet når barnet befinner seg 2.00 m fra senteret?

10.40 Rotoren (svinghjulet) til et mini-gyroskop har masse 0.140 kg.
Dets treghetsmomentet om aksen er 1.20 x 10^{-4} kgm^2.
Massen av rammen er 0.0250 kg.
Gyroskopets arm kan rotere om et kuleledd og massesenteret befinner seg 4.00 cm fra dette rotasjonsleddet.
Gyroskopet roterer rundt i horisontalplanet. En omdreining tar 2.20 sekunder.

a) Finn kraften fra kuleleddet på gyroskopet.

b) Finn vinkelhastigheten til gyroskopets rotor.

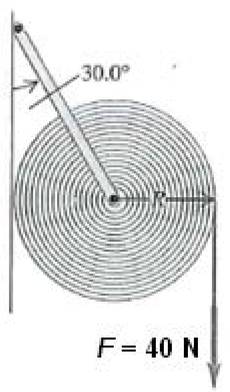
c) Lag en tegning som viser angulær momentvektor og kraftmomentvektor.



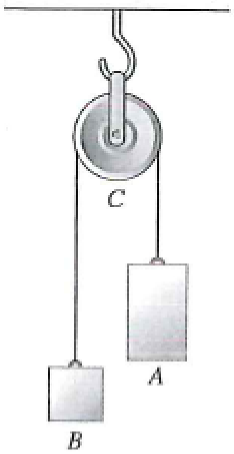
10.54 En stor 16.0 kg papir-rull med radius R = 18.0 cm hviler mot veggen
og holdes på plass en av en holder koblet til en stav gjennom papir-rullens senter.
Staven kan rotere uten friksjon og har et treghetsmoment på 0.260 kgm^2 om aksen.
Den andre delen av holderen er festet friksjonsfritt til et feste på veggen og holderen danner 30^0 med veggen. Vi ser bort fra massen av holderen.
Den kinetiske friksjonskoeffisienten mellom papir og vegg er 0.25.
En konstant kraft F = 40.0 N virker vertikalt nedover på enden av papiret slik at papiret ruller av.

a) Hva er størrelsen på kraften som staven virker på papir-rullen med når papiret rulles av?

b) Hva er vinkelakselerasjonen til papir-rullen?



10.58 Figuren viser en Atwood's maskin.
Bestem den lineære akselerasjonen av blokkene A og B, vinkelakselerasjonen til trinsen C og strekket i snoren på hver side av trinsen.
Snoren ruller over trinsen uten å gli.
Massen til A og B er henholdsvis m_A og m_B, treghetsmomentet til trinsen er I og radien til trinsen er R.



10.59 En massiv disk ruller uten å skli på et horisontalt underlag med en konstant hastighet på 2.50 m/s.

a) Hvor langt kan den rulle opp et skråplan med en helning på 30.0^0 før den stopper?
b) Forklar hvorfor svaret i a) ikke avhenger av verken masse eller radius til disken.

10.75 Diskene A og B er montert på en akse SS og kan kobles eller frakobles vha en clutch C
Treghetsmomentet (om den nevnte aksen) til disk A er halvparten av treghetsmomentet til disk B.
Vi ser bort fra treghetsmomentet til aksen og clutchen.
A roteres opp til en vinkelhastighet ω_0. Det akselererende kraftmomentet fjernes så fra A og A kobles til B vha clutchen.
2400 J med termisk energi utvikles i clutchen under sammenkoblingen.
Hva er den opprinnelige kinetiske energien til disken A?

10.82 Et baseball-tre med masse 0.800 kg og lengde 0.900 m ligger på et friksjonsfritt horisontalt underlag.
Baseball-treets treghetsmoment om masse-senteret er 0.0530 kgm^2.
Baseball-treet treffes av en baseball normalt på baseball-treet.
Støtet forårsaker en impuls

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F dt$$

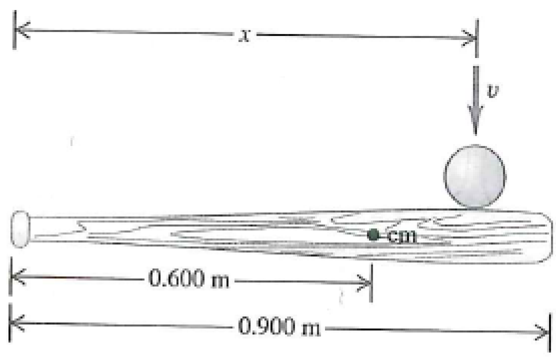
i et punkt en avstand x fra baseball-treets venstre ende (håndtaket).

Bestem x slik at baseball-treets håndtak blir liggende rolig idet baseball-treet begynner å flytte på seg.

Hint: Betrakt bevegelsen til massesenteret og rotasjonen om massesenteret.
Bestem x slik at disse to bevegelsene kombinert gir hastighet v = 0 baseball-treets håndtak.
Merk at integrasjon av tilhørende ligning i læreboken gir

$$\Delta L = \int_{t_1}^{t_2} (\sum \tau) dt$$

Det beregnede punktet på baseball-treet i avstand x fra håndtaket kalles støtsenteret.
Når ballen treffer dette punktet, får vi minimal rekyl (bakoverslag) i håndtaket og dette er mest behagelig for hånden.



Løsning

10.1 a)

$$\tau = rF\sin\varphi = 4.00m \cdot 10.0N \cdot \sin 90^0 = \underline{\underline{40.0Nm}}$$ Ut av papirplanet

b)

$$\tau = rF\sin\varphi = 4.00m \cdot 10.0N \cdot \sin 120^0 = \underline{\underline{34.6Nm}}$$ Ut av papirplanet

c)

$$\tau = rF\sin\varphi = 4.00m \cdot 10.0N \cdot \sin 30^0 = \underline{\underline{20.0Nm}}$$ Ut av papirplanet

d)

$$\tau = rF\sin\varphi = 2.00m \cdot 10.0N \cdot \sin 60^0 = \underline{\underline{17.3Nm}}$$ Inn i papirplanet

e)

$$\tau = rF\sin\varphi = 0m \cdot 10.0N \cdot \sin\varphi = \underline{\underline{0Nm}}$$

f)

$$\tau = rF\sin\varphi = 4.00m \cdot 10.0N \cdot \sin 180^0 = \underline{\underline{0Nm}}$$

10.3

$$r_1 = r_2 = r_3 = \sqrt{(0.090m)^2 + (0.090m)^2} = \underline{0.1273m}$$

$$\tau_1 = -r_1F_1\sin\varphi_1 = -0.1273m \cdot 18.0N \cdot \sin 135^0 = \underline{-1.62Nm}$$

$$\tau_2 = +r_2F_{21}\sin\varphi_{21} = +0.1273m \cdot 26.0N \cdot \sin 135^0 = \underline{+2.34Nm}$$

$$\tau_3 = +r_3F_3\sin\varphi_3 = +0.1273m \cdot 14.0N \cdot \sin 90^0 = \underline{+1.78Nm}$$

$$\tau = \sum \tau_i = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = -1.62Nm + 2.34Nm + 1.78Nm = \underline{\underline{+2.50Nm}}$$

G

10.6 a)

$$\tau = I\alpha = I\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 3.50kgm^2 \cdot \frac{600\frac{rev}{\min}}{10.0s} = 3.50kgm^2 \cdot \frac{600\frac{2\pi}{60s}}{10.0s} = \underline{\underline{27.5Nm}}$$

b)

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 3.50kgm^2 \cdot (600\frac{rev}{\min})^2 = \frac{1}{2} \cdot 3.50kgm^2 \cdot (600\frac{2\pi}{s})^2 = \underline{\underline{6.91 \times 10^3\ J}}$$

10.11 Omgjøring av en omdreining (rev) til 2*PI og et minutt til 60 sekunder.
Deretter bruk av rotasjonsligning ved kontant vinkelakselerasjon.
Kraftmomentet er produktet av arm r og kraft friksjonskraft F.
Videre er friksjonskraften F proposjonal med normalkraften N.
Proporsjonalitets-konstanten μ er den etterspurte friksjonskoeffisienten.

$$\omega_0 = 850\frac{rev}{\min} = 850\frac{2\pi}{60s} = \underline{89.012s^{-1}}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 89.012s^{-1}}{7.50s} = \underline{-11.868s^{-2}}$$

$$\tau = -Fr = -\mu Nr$$

$$\mu = -\frac{\tau}{Nr} = -\frac{I\alpha}{Nr} = -\frac{\frac{1}{2}Mr^2\alpha}{Nr} = -\frac{\alpha Mr}{2N} = -\frac{-11.868s^{-2}\cdot 50.0kg\cdot\frac{0.520m}{2}}{2\cdot 160N} = \underline{\underline{0.482}}$$

10.15 a)

$$G - T = ma_{cm}$$
$$\underline{mg - T = ma_{cm}}$$

$$\tau_{cm} = I_{cm}\alpha$$

$$Tr = I_{cm}\alpha = mr^2\alpha = mr^2\frac{a_{cm}}{r} = mra_{cm}$$
$$\underline{T = ma_{cm}}$$
$$\Downarrow$$
$$mg - ma_{cm} = ma_{cm} \Rightarrow \underline{a_{cm} = \frac{1}{2}g}$$
$$\Downarrow$$
$$T = \frac{1}{2}mg = \frac{1}{2}\cdot 0.180kg \cdot 9.80\frac{m}{s^2} = \underline{\underline{0.882N}}$$

Eller :

$$\tau_0 = I_0\alpha$$
$$mgr = (mr^2 + mr^2)\frac{a_{cm}}{r} \;\Rightarrow\; \underline{a_{cm} = \frac{1}{2}g}$$

b)

$$y = \frac{1}{2}a_{cm}t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2y}{a_{cm}}} = \sqrt{\frac{2y}{\frac{1}{2}g}} = 2\sqrt{\frac{y}{g}} = 2\sqrt{\frac{0.750m}{9.80\frac{m}{s^2}}} = \underline{\underline{0.553s}}$$

c) $$\omega = \omega_0 + \alpha t = \omega_0 + \frac{a_{cm}}{r}t = \omega_0 + \frac{\frac{1}{2}g}{r}t = 0 + \frac{\frac{1}{2}\cdot 9.80\frac{m}{s^2}}{0.0800m}0.553s = \underline{\underline{33.9s^{-1}}}$$

G
10.26 a)

$$\tau = I\alpha$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{600Nm}{67.5kgm^2} = \underline{\underline{8.89s^2}}$$

b)

$$\omega^2 = \omega_0{}^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)} = \sqrt{0 + 2 \cdot 8.89s^{-2} \cdot 4.00rev} = \sqrt{0 + 2 \cdot 8.89s^{-2} \cdot 4.00 \cdot 2\pi} = \underline{\underline{21.1s^{-1}}}$$

c)

$$W = \tau \cdot \Delta\theta = 600Nm \cdot 4.00rev = 600Nm \cdot 4.00 \cdot 2\pi = \underline{\underline{1.51 \cdot 10^4\,J}}$$

Eller: $W = K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 67.5kgm^2 \cdot (21.1s^{-1})^2 = \underline{\underline{1.51 \cdot 10^4\,J}}$

de)

$$P_{inst} = \tau\omega = 600Nm \cdot 21.1s^{-1} = \underline{\underline{12.7kW}}$$

$$P_{av} = \frac{1}{2}P_{inst} = \frac{1}{2} \cdot 12.7kW = \underline{\underline{6.35kW}}$$

G
10.28

$$L = I\omega = \frac{2}{5}MR^2\omega = \frac{2}{5} \cdot 5.00kg \cdot (0.160m)^2 \cdot 6.00s^{-1} = \underline{\underline{0.307kgm^2s^{-1}}}$$

10.33 a)

Kraften i tauet virker langs tauet og gir derfor ikke noe kraftmoment.

Angulært moment er derfor bevart siden $\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}$

b)

$$L_1 = I_1\omega_1 = mr_1^{\ 2}\omega_1$$
$$L_2 = I_2\omega_2 = mr_{21}^{\ \ 2}\omega_2$$
$$L_1 = L_2$$
$$\Downarrow$$
$$mr_1^{\ 2}\omega_1 = mr_{21}^{\ \ 2}\omega_2$$
$$\Downarrow$$
$$\omega_2 = (\frac{r_1}{r_2})^2\omega_1 = \left(\frac{0.300m}{0.150m}\right)^2 \cdot (1.75s^{-1}) = \underline{\underline{7.00s^{-1}}}$$

c)

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}I_2\omega_2^{\ 2} - \frac{1}{2}I_1\omega_1^{\ 2}$$
$$= \frac{1}{2}mr_2^{\ 2}\omega_2^{\ 2} - \frac{1}{2}mr_1^{\ 2}\omega_1^{\ 2}$$
$$= \frac{1}{2}m\left[(r_2\omega_2)^2 - (r_1\omega_2)^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}0.02500kg \cdot \left[(0.150m \cdot 7.00s^{-1})^2 - (0.300m \cdot 1.75s^{-1})^2\right] = \underline{\underline{1.03 \cdot 10^{-2}\,J}}$$

d)

Siden ingen adre krefter enn kraften i snoren utfører arbeid,

er arbeidet utført av snorkraften lik $\underline{\underline{1.03 \cdot 10^{-2}\,J}}$

10.34

$$I_1 = 0.400kgm^2 + \frac{1}{12} \cdot 8.00kg \cdot (1.80m)^2 = \underline{2.56kgm^2}$$

$$I_2 = 0.400kgm^2 + 8.00kg \cdot (25 \cdot 10^{-2}m)^2 = \underline{0.9kgm^2}$$

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega = \frac{2.56kgm^2}{0.9kgm^2} \cdot 0.40\frac{rev}{s} = \underline{\underline{1.14\frac{rev}{s}}}$$

10.36

$$I_1 = I_0 = \underline{1200kgm^2}$$
$$I_2 = I_0 + mR^2 = 1200kgm^2 + 40kg \cdot (2.00m)^2 = \underline{1360kgm^2}$$
$$L_1 = L_2$$
$$\Downarrow$$
$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$
$$\Downarrow$$
$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{1200kgm^2}{1360kgm^2} \cdot \frac{2\pi}{6.00s} = \underline{\underline{0.924s^{-1}}}$$

10.40 Hvis gyroskop-hjulet har stor vinkelhastighet i forhold til den horisontale vinkelhastigheten til gyroskoparmen, så vil kraften på gyroskopet (inkludert armen) fra kuleleddet være motsatt like stor som tyngden av hjulet pluss armen (retning vertikalt oppover).
Hvis den horisontale rotasjonen av armen ikke er ubetydelig i forhold til rotasjonen av hjulet, så kommer det en tilleggskraft (retning horisontalt mot venstre på figuren) som har størrelse gitt ved $Fh = M\Omega r$^2 hvor Ω er gitt nedenfor og hvor M er massen av hjulet + armen.
I regningen nedenfor er først kun beregnet tyngden av hjulet + armen (den horisontale kraften vil være 0.054 N, dvs relativt liten i forhold til tyngden).

$$F = w = Mg = (0.140kg + 0.0250kg) \cdot 9.80\frac{m}{s^2} = \underline{\underline{1.617N}}$$

$$\Omega = \frac{wR}{I\omega}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega = \frac{wR}{I\Omega} = \frac{1.372N \cdot 4.00 \cdot 10^{-2}m}{1.20 \cdot 10^{-4}kgm^2 \cdot \frac{2\pi}{2.20s}} = \underline{\underline{160s^{-1}}}$$

10.54 a)

$$F_{rod}\cos\theta = J + G + F$$

$$F_{rod}\sin\theta = \mathrm{N}$$

$$J = \mu\mathrm{N}$$

$$\Downarrow$$

$$F_{rod} = \frac{G + F}{\cos\theta - \mu\sin\theta} = \frac{mg + F}{\cos\theta - \mu\sin\theta} = \frac{16.0kg \cdot 9.80\frac{m}{s^2} + 40.0N}{\cos 30^0 - 0.25 \cdot \sin 30^0} = \underline{\underline{266N}}$$

b)

$$\tau = (F - J)R = (F - \mu\mathrm{N})R = (F - \mu F_{rod}\sin\theta)R$$

$$\tau = I\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{(F - \mu F_{rod}\sin\theta)R}{I} = \frac{(40.0N - 0.25 \cdot 266N \cdot \sin 30^0)18.0 \cdot 10^{-2}m}{0.260kgm^2} = \underline{\underline{4.71s^{-2}}}$$

10.58

$$G_A - T_A = m_A a$$

$$T_B - G_B = m_B a$$

$$\tau = (T_A - T_B)R$$

$$\tau = I\alpha$$

$$a = R\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$a = \underline{\underline{\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B + \frac{I}{R^2}} \cdot g}}$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \underline{\underline{\frac{m_A - m_B}{m_A R + m_B R + \frac{I}{R}} \cdot g}}$$

$$T_A = m_A(g - a) = \underline{\underline{\frac{2m_A m_B + m_A \frac{I}{R^2}}{m_A + m_B + \frac{I}{R^2}} \cdot g}}$$

$$T_B = m_B(g - a) = \underline{\underline{\frac{2m_B m_A + m_B \frac{I}{R^2}}{m_A + m_B + \frac{I}{R^2}} \cdot g}}$$

10.59

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\frac{3}{4}mv^2 + 0 = 0 + mgs \cdot \sin\beta$$ (Se eksempel 10 - 6 i læreboken)

$$s = \frac{3v^2}{4g\sin\beta} = \frac{3 \cdot (2.50\frac{m}{s})^2}{4 \cdot 9.80\frac{m}{s^2} \cdot \sin 30.0^0} = \underline{\underline{0.957m}}$$

10.75

$$I_B = 3I_A$$
$$L_i = L_f$$
$$I_A\omega_0 = (I_A + I_B)\omega \;\Rightarrow\; \omega = \frac{I_A}{I_A + I_B}\omega_0 = \frac{I_A}{I_A + 3I_A}\omega_0 = \underline{\frac{1}{4}\omega_0}$$

$$K_{Ai} + K_{Bi} = K_{ABf} + \Delta K$$
$$\frac{1}{2}I_A\omega_0^{\ 2} + 0 = \frac{1}{2}(I_A + I_B)\omega^2 + \Delta K = \frac{1}{2}(I_A + 3I_A)(\frac{1}{4}\omega_0)^2 + \Delta K = \frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{2}I_A\omega_0^{\ 2}) + \Delta K$$
$$K_A = \frac{1}{4}K_A + \Delta K$$
$$\frac{3}{4}K_A = \Delta K$$
$$K_A = \frac{4}{3}\Delta K = \frac{4}{3}\cdot 2400J = \underline{\underline{3200J}}$$

10.82

$$0 = \Delta v_{end} = \Delta v_{cm} - \Delta\omega \cdot x_{cm} = \frac{J}{m} - \frac{J(x - x_{cm})}{I}\cdot x_{cm}$$
$$\Downarrow$$
$$x = x_{cm} + \frac{I}{mx_{cm}} = 0.600m + \frac{5.30\cdot 10^{-2}\,kgm^2}{0.600kg\cdot 0.800m} = \underline{\underline{0.710m}}$$

Noen kommentarer / relasjoner:

$\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{end}} = \vec{v}_{end/CM} + \vec{v}_{CM}$

$\Delta\omega\cdot x_{cm}$ er hastighetsendring av endepunktet i forhold til masse - senteret (ren rotasjon)

$dJ = Fdt = mdv$

$$dL = Id\omega = \tau dt = Frdt = rFdt = rdJ \;\Rightarrow\; d\omega = \frac{dL}{I} = \frac{rdJ}{I}$$