UNIVERSITETET I AGDER
Grimstad

E K S A M E N S O P P G A V E :

FAG: MA-209 Matematikk 3 LÆRER: Per Henrik Hogstad

Klasse(r):	**Dato: 29.09.09**	**Eksamenstid, fra-til: 09.00 – 14.00**	
Eksamensoppgaven består av følgende	**Antall sider: 4 (inkl. forside + vedlegg)**	**Antall oppgaver: 5**	**Antall vedlegg: 0**
Tillatte hjelpemidler er:	**Kalkulator** **Hogstad: Formler MA-209** **Haugan: Formler og tabeller (tillatt å skrive på de fem siste sidene)**		
KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG			

MA-209 Utsatt eksamen Vår 2009

Oppg nr		Poeng
1	a	3
	b	3
	c	3
	d	3
	e	3
2		3
3		3
4		3
5	a	3
	b	3
Sum		30

Poengene viser vekt-fordelingen for de enkelte del-spørsmålene.
Ved karaktersetting vektlegges selvfølgelig i tillegg en total-vurdering,
bl.a. en vurdering av i hvilken grad kandidaten har kunnskaper innenfor
de ulike områdene gitt i oppgave-settet.

LYKKE TIL !

1. En kurve C i rommet er gitt ved:

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + (1-t^2)\vec{j} + (t-2)^2\vec{k} = \left[t, 1-t^2, (t-2)^2\right] \qquad t \in [0,1]$$

a) Bestem enhetstangenten i punktet (0,1,4).

b) Kurven C ligger i et plan.
Finn ligningen for dette planet.

c) Vi har gitt følgende vektor-funksjon:

$$\vec{F}(x,y,z) = 3x^2\vec{i} + y^2z^2\vec{j} + \frac{2}{3}y^3z\vec{k} = \left[3x^2, y^2z^2, \frac{2}{3}y^3z\right]$$

Bestem en funksjon f(x,y,z) slik at:

$$\vec{F} = \nabla f$$

d) Bestem:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

e) La K_1 være den rette linjen som går fra punktet (1,0,1) til punktet (0,1,4).
La K_2 være den kurven som fremkommer ved kurven C etterfulgt av kurven K_1.
Videre har vi gitt følgende vektor-funksjon:

$$\vec{G}(x,y,z) = y\vec{i} + 2x\vec{j} = [y, 2x, 0]$$

Bestem følgende to kurve-integraler langs kurven K_2:

1) $$\int_{K_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

2) $$\int_{K_2} \vec{G} \cdot d\vec{r}$$

2. Finn volumet av det legemet over området D under flaten $z(x,y) = 1 + x^2$
   når D er det området i xy-planet som er avgrenset av de to kurvene $y = x^2$ og $y = x^3$.

3. Bestem massen og masse-senteret til tetraederet med hjørner i
   (0,0,0), (a,0,0), (0,a,0) og (0,0,a).
   Massetettheten er gitt ved:

   $$\delta(x, y, z) = x$$

   I denne oppgaven skal du kun beregne massen og masse-senterets x-koordinat.
   Beregning av masse-senterets y- og z-koordinat skal du kun antyde starten av,
   (kort forklaring) uten å utføre noen beregninger.

   Tegn en skisse av tetraederet.

4. Bestem arealet av den delen av toppen av en paraboloideflate
   som skjæres ut vha en kjegle når paraboloiden og kjeglen er gitt ved henholdsvis:

   $z = 2 - x^2 - y^2$ Paraboloiden

   $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ Kjeglen

5. Vi har gitt følgende vektor-funksjon:

   $$\vec{F}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}[-y, x, 0]$$

   a) Bestem

   $$curl\ \vec{F}$$

   b) La C være en enkel lukket, glatt kurve i planet som går rundt origo i positiv omløpsretning.
   Bestem følgende sirkulasjon (T-vektor er enhetstangentvektor til kurven C):

   $$\oint_c \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

Løsning:

1. a) Enhetstangentvektor:

$\vec{r}(t) = t\vec{i} + (1-t^2)\vec{j} + (t-2)^2\vec{k} = [t, 1-t^2, (t-2)^2] \qquad t \in [0,1]$

$\Downarrow$

$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = [1, -2t, 2(t-2)]$

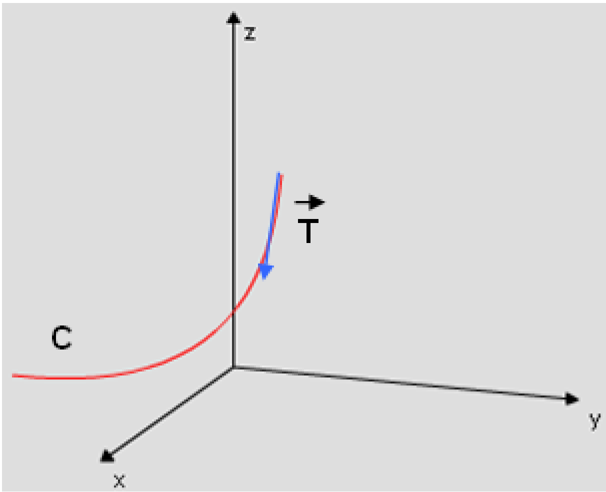
Punktet $(0,1,4)$ svarer til $t = 0$

$\vec{v}(0) = \vec{r}\,'(0) = [1, -2 \cdot 0, 2(0-2)] = [1, 0, -4]$

$|\vec{v}(0)| = |\vec{r}\,'(0)| = |[1,0,-4]| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$

$\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}$

$\vec{T}(0) = \dfrac{\vec{v}(0)}{|\vec{v}(0)|} = \underline{\underline{\dfrac{1}{\sqrt{17}}[1,0,-4]}}$



b) Et plan har ligningen Ax + By + Cz = D.
For å vise at kurven C ligger i et plan, samt finne ligningen for dette planet, må vi bestemme A, B, C og D slik at

At + B(1-t^2) + C(t-2)^2 = D   for alle t.

$$At + B(1-t^2) + C(t-2)^2 \equiv D$$
$$(C-B)t^2 + (A-4C)t + (B+4C-D) \equiv 0$$

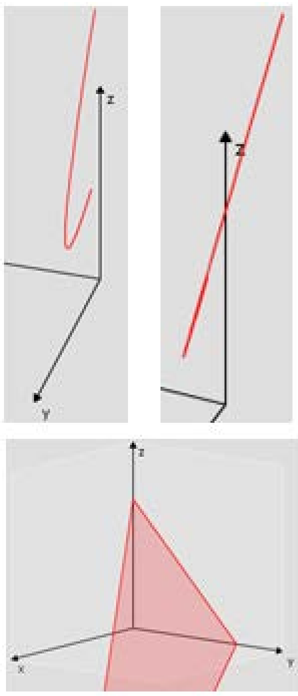
$$C - B = 0$$
$$A - 4C = 0$$
$$B + 4C - D = 0$$

$$A = 4/5D$$
$$B = 1/5D$$
$$C = 1/5D$$
$$D = D$$

$$\underline{\underline{4x + y + z = 5}}$$

Eller:

$$x = t \wedge y = 1 - t^2 \wedge z = (t-2)^2$$
$$\Downarrow$$
$$z = (t-2)^2 = t^2 - 4t + 4 = 1 - y - 4x + 4 = 5 - y - 4x$$
$$\underline{\underline{4x + y + z = 5}}$$



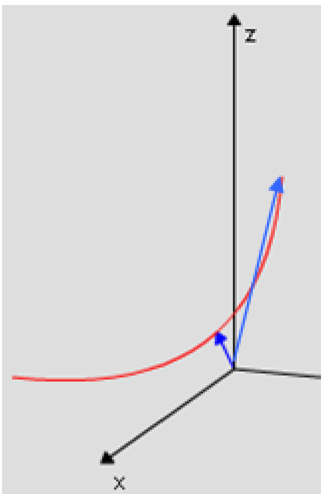
c) Bestemmelse av en gradient-funksjon til F-vektor:

$$\vec{F}(x,y,z) = \left[3x^2, y^2z^2, \frac{2}{3}y^3z\right] = \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$$
$$f(x.y.z) = x^3 + g(y,z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} = y^2z^2$$
$$g(y,z) = \frac{1}{3}y^3z^2 + h(z)$$
$$f(x,y,z) = x^3 + \frac{1}{3}y^3z^2 + h(z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2}{3}y^3z + \frac{dh}{dz} = \frac{2}{3}y^3z$$
$$\frac{dh}{dz} = 0$$
$$h(z) = c$$
$$f(x,y,z) = \underline{\underline{x^3 + \frac{1}{3}y^3z^2 + c}}$$

d) Bestemmelse av kurve-integralet:

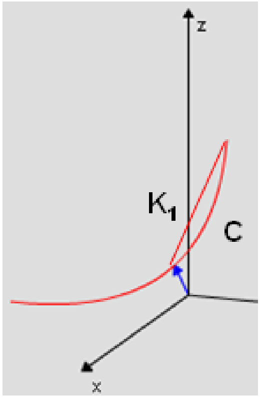
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t=0}^{t=1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$
$$= \int_{(0,1,4)}^{(1,0,1)} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$
$$= f(1,0,1) - f(0,1,4)$$
$$= \left(1^3 + \frac{1}{3}\cdot 0^3\cdot 1^2 + c\right) - \left(0^3 + \frac{1}{3}\cdot 1^3\cdot 4^2 + c\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{3}\cdot 16$$
$$= \underline{\underline{-\frac{13}{3}}}$$



e) 1)

Kurven K_2 er en lukket kurve som først følger kurven C fra punktet (0,1,4) til punktet (1,0,1), deretter følger den rette linjen K_1 fra punktet (1,0,1) tilbake til startpunktet til C (0,1,4).
Siden F er et konservativt vektorfelt (det finnes en funksjon f slik at F-vektor er gradienten til f, følger at integralet i e1) er lik null.

$$\int_{K_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$



2)

$$\vec{G}(x,y,z) = y\vec{i} + 2x\vec{j} = [y,2x,0]$$

$$curl\vec{G} = \nabla \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & 2x & 0 \end{vmatrix} = [0,0,1]$$

Kurven K_2 ligger i planet 4x+y+z=5.
Planet er en nivåflate til funksjonen f(x,y,z) = 4x+y+z.
En normal-vektor til planet er derfor gitt ved:

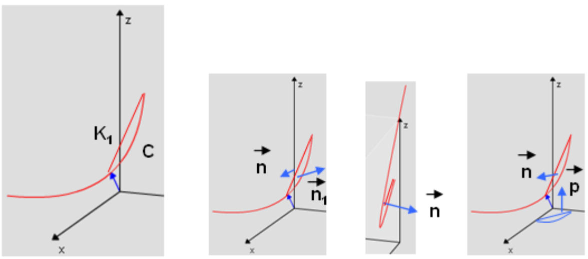
$$\vec{n}_1 = \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right] = [4,1,1]$$

En normalvektor som vender ut fra den postive siden av omsluttet flate ved traversering av K_2 vil være gitt ved:

$$\vec{n}_2 = -\vec{n}_1 = [-4,-1,-1]$$

Enhetsnormalvektoren som peker ut av den positive flaten er gitt ved:

$$\vec{n} = \frac{\vec{n}_2}{|\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}}[-4,-1,-1] = \frac{1}{3\sqrt{2}}[-4,-1,-1]$$



Herav får vi:

$$\int_{K_2} \vec{G} \cdot d\vec{r} = \oint_{K_2} \vec{G} \cdot d\vec{r} = \iint_S curl\vec{G} \cdot \vec{n} dS$$

$$= \iint_S [0,0,1] \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} [-4,-1,-1] dS$$

$$= -\frac{1}{3\sqrt{2}} \iint_S dS$$

$$= -\frac{1}{3\sqrt{2}} \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA$$

$$= -\frac{1}{3\sqrt{2}} \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \vec{k}|} dA$$

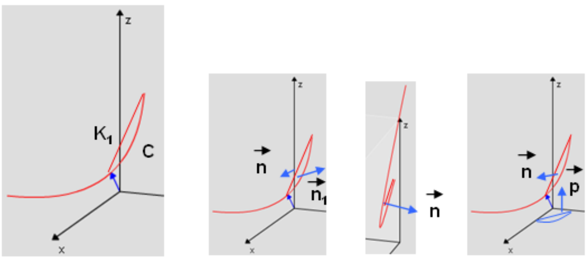
$$= -\frac{1}{3\sqrt{2}} \iint_R \frac{|[4,1,1]|}{|[4,1,1] \cdot [0,0,1]|} dA$$

$$-\frac{1}{3\sqrt{2}} \iint_R \frac{\sqrt{4^2 + 1^1 + 1^2}}{1} dA$$

$$= -\frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot 3\sqrt{2} \iint_R dA = -\iint_R dA$$

$$= -\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=1-x}^{y=1-x^2} dy dx = -\int_{x=0}^{x=1} [y]_{y=1-x}^{y=1-x^2} dx = -\int_{x=0}^{x=1} (x - x^2) dx$$

$$= -\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1} = -\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = \underline{\underline{-\frac{1}{6}}}$$



2. Volumet av legemet (beregnet vha trippelintegral):

$$V = \iiint_D dV = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x^3}^{y=x^2}\int_{z=0}^{z=1+x^2} dzdydx = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x^3}^{y=x^2} [z]_{z=0}^{z=1+x^2}\, dydx$$

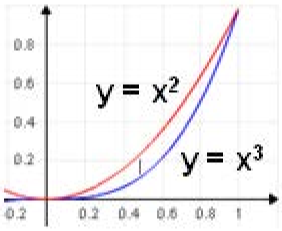
$$= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x^3}^{y=x^2} (1+x^2)dydx$$

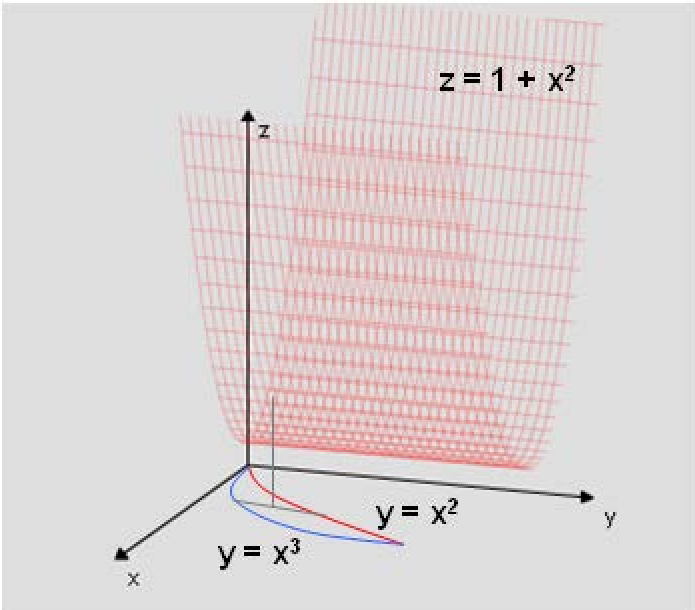
$$= \int_{x=0}^{x=1} \left[y + x^2 y\right]_{Y=X}^{Y=X^3} dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \left(x^2 + x^4 - x^3 - x^5\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \underline{\underline{\frac{7}{60}}}$$





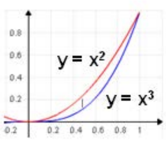
2. (forts.)

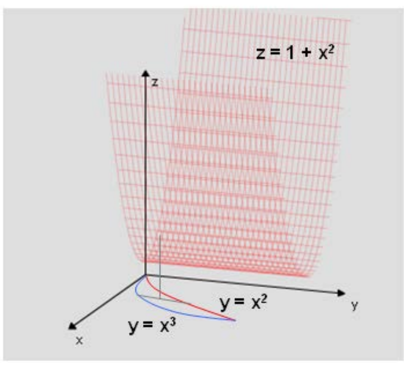
Eller beregning vha dobbeltintegral:

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D (1+x^2)\,dA \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x^3}^{y=x^2} (1+x^2)\,dy\,dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \left[y + x^2 y\right]_{Y=X^3}^{Y=X}\,dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \left(x^2 + x^4 - x^3 - x^5\right)dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \underline{\underline{\frac{7}{60}}}
\end{aligned}
$$

Eller:

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D (1+x^2)\,dA \\
&= \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=\sqrt{y}}^{y=x=\sqrt[3]{y}} (1+x^2)\,dx\,dy \\
&= \int_{y=0}^{y=1} \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{x=\sqrt{y}}^{x=\sqrt[3]{y}} dy \\
&= \int_{xy=0}^{y=1} \left(y^{\frac{1}{3}} + \frac{y}{3} - y^{\frac{1}{2}} - \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3}\right)dy \\
&= \left[\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{6}y^2 - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}y^{\frac{5}{2}}\right]_{y=0}^{y=1} \\
&= \underline{\underline{\frac{7}{60}}}
\end{aligned}
$$





3. Tetraederet er begrenset av de tre koordinatplanene og flaten x + y + z = a

Massen av tetraederet:

$$M = \iiint_T dm = \iiint_T \delta(x,y,z)dV$$
$$= \iiint_T xdV$$
$$= \int_{x=0}^{x=a}\int_{y=0}^{y=a-x}\int_{z=0}^{z=a-x-y} xdzdydx$$
$$= \int_{x=0}^{x=a}\int_{y=0}^{y=a-x} x[z]_{z=0}^{z=a-x-y} dydx$$
$$= \int_{x=0}^{x=a}\int_{y=0}^{y=a-x} x(a-x-y)dydx$$
$$= \int_{x=0}^{x=a} x\left[(a-x)y - \frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=a-x} dx$$
$$= \int_{x=0}^{x=a} \frac{1}{2}x(a-x)^2 dx$$
$$= \int_{x=0}^{x=a} \frac{1}{2}\left(a^2x - 2ax^2 + x^3\right)dx = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a^2x^2 - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{4}x^4\right)\right]_{x=0}^{x=a} = \frac{1}{2}a^4\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{24}a^4}}$$

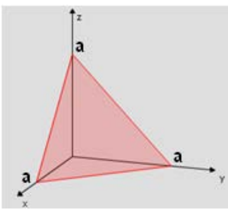
xy-moment:

$$M_{yz} = \iiint_T xdm$$
$$= \iiint_T x\delta(x,y,z)dV$$
$$= \iiint_T x^2 dV$$
$$= \int_{x=0}^{x=a} \frac{1}{2}\left(a^2x^2 - 2ax^3 + x^4\right)dx$$ Se beregning av M
$$= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}a^2x^3 - \frac{1}{2}ax^4 + \frac{1}{5}x^5\right)\right]_{x=0}^{x=a}$$
$$= \frac{1}{2}a^5\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)$$
$$= \underline{\frac{1}{60}a}$$

Massesenterets x-koordinat:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\frac{1}{60}a^5}{\frac{1}{24}a^4} = \underline{\underline{\frac{2}{5}a}}$$

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{1}{M}\iiint_T ydm = \frac{1}{M}\iiint_T y\delta(x,y,z)dV \, \frac{1}{M}\iiint_T yxdV$$
$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{1}{M}\iiint_T zdm = \frac{1}{M}\iiint_T z\delta(x,y,z)dV \, \frac{1}{M}\iiint_T zxdV$$



4. Arealet av en parameterisert flate:

$$A = \iint_S dS = \iint_R |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv$$

Skjæring mellom paraboloiden og kjeglen:

$$z = 2 - x^2 - y^2$$
$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\Downarrow$$
$$z = 2 - z^2$$
$$z^2 + z - 2 = 0$$
$$(z = -2) \quad \vee \quad \underline{z = 1}$$

Parameterisering av flaten på toppen av paraboloiden (skjært ut vha kjeglen):

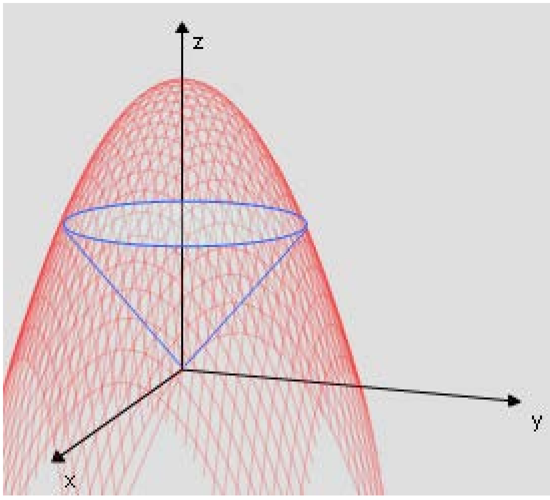
$$\vec{r}(r,\theta) = [r\cos\theta, r\sin\theta, 2 - r^2] \qquad r \in [0,1] \qquad \theta \in [0,2\pi]$$

$$\vec{r}_r(r,\theta) = [\cos\theta, \sin\theta, -2r]$$
$$\vec{r}_\theta(r,\theta) = [-r\sin\theta, r\cos\theta, 0]$$

$$\vec{r}_r \times \vec{r}_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & -2r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = [2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta, r]$$
$$|\vec{r}_r \times \vec{r}_\theta| = \sqrt{(2r^2\cos\theta)^2 + (2r^2\sin\theta)^2 + r^2} = r\sqrt{4r^2+1}$$

Areal:

$$A = \iint_S dS = \iint_R |\vec{r}_r \times \vec{r}_\theta| drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{4r^2+1}drd\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{12}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\frac{5\sqrt{5}-1}{12}d\theta = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)}}$$



5. a) Curl til F-vektor:

$$\vec{F}(x,y,z) = [F_1, F_2, F_3] = \frac{1}{x^2+y^2}[-y, x, 0]$$

$$curl\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right]$$

$$= \left[\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial(\frac{1}{x^2+y^2}x)}{\partial z}, \frac{\partial(\frac{1}{x^2+y^2}(-y))}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x}, \frac{\partial(\frac{1}{x^2+y^2}x)}{\partial x} - \frac{\partial(\frac{1}{x^2+y^2}(-y))}{\partial y}\right]$$

$$= \left[0, 0, \frac{\partial(\frac{1}{x^2+y^2}x)}{\partial x} - \frac{\partial(\frac{1}{x^2+y^2}(-y))}{\partial y}\right]$$

$$= \left[0, 0, \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{x^2+y^2}x) - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{x^2+y^2}(-y))\right]$$

$$= \left[0, 0, \frac{\partial}{\partial x}(x(x^2+y^2)^{-1}) - \frac{\partial}{\partial y}(-y(x^2+y^2)^{-1})\right]$$

$$= \left[0, 0, (1(x^2+y^2)^{-1} - x(x^2+y^2)^{-2}2x) - (-1(x^2+y^2)^{-1} + y(x^2+y^2)^{-2}2y)\right]$$

$$= \left[0, 0, (\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}) - (\frac{-1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2})\right]$$

$$= \left[0, 0, \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$= \underline{\underline{[0,0,0]}}$$

b) Sirkulasjon til F-vektor:

$$\oint_c \vec{F}\cdot\vec{T}ds + \oint_{c_a} \vec{F}\cdot\vec{T}ds = \iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}dS = \iint_A curl\vec{F}\cdot\vec{k}dA = \iint_A \vec{0}\vec{k}dA = 0$$

$$\oint_c \vec{F}\cdot\vec{T}ds = -\oint_{c_a} \vec{F}\cdot\vec{T}ds = \oint_{-c_a} \vec{F}\cdot\vec{T}ds$$

$$= \oint_{-c_a} \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad \vec{r}(t) = [a\cos t, a\sin t, 0] \qquad d\vec{r} = [-a\sin t, a\cos t, 0]dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2}[-a\sin t, a\cos t, 0]\cdot[-a\sin t, a\cos t, 0]dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = \int_0^{2\pi} dt = \underline{\underline{2\pi}}$$