UNIVERSITETET I AGDER
Grimstad

E K S A M E N S O P P G A V E :

FAG: MA-209 Matematikk 3 LÆRER: Per Henrik Hogstad

Klasse(r):	**Dato: 15.12.10**	**Eksamenstid, fra-til: 09.00 – 14.00**	
Eksamensoppgaven består av følgende	**Antall sider: 5 (inkl. forside)**	**Antall oppgaver: 5**	**Antall vedlegg: 0**
Tillatte hjelpemidler er:	**Kalkulator** **Formelsamling (tillatt å skrive i formelsamlingen)**		
KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG			

MA-209 Utsatt eksamen 2010

Oppg nr		Poeng
1		3
2	a	3
	b	3
3		3
4	a	3
	b	3
	c	3
	d	3
	e	3
	f	3
5	a	3
	b	3
	c	3
Sum		39

Poengene viser vekt-fordelingen for de enkelte del-spørsmålene.
Ved karaktersetting vektlegges selvfølgelig i tillegg en total-vurdering, bl.a. en vurdering av i hvilken grad kandidaten har kunnskaper innenfor de ulike områdene gitt i oppgave-settet.

LYKKE TIL !

1. Vi tenker oss en partikkel som beveger seg i rommet.
   Partikkelens posisjonsvektor som funksjon av tiden (parameteren) *t* er gitt ved:

   $$\vec{r} = (1-t)\vec{i} + (t^2-1)\vec{j} + 2t\vec{k} = \left[1-t, t^2-1, 2t\right]$$

   Bestem hastighetvektoren, akselerasjonsvektoren og enhetstangentvektoren som funksjon av tiden *t*.

2. a) Vi har gitt følgende kurve, kalt en helix (se figur 2.1):

   $$\vec{r} = \left[2\cos t, 2\sin t, t\right]$$

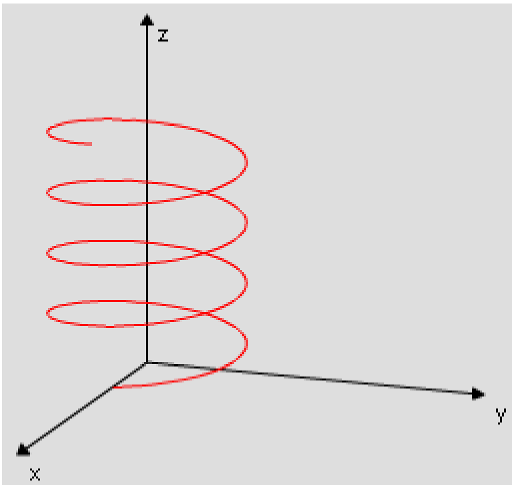


Fig 2.1

   Bestem lengden av den delen av denne kurven som svarer til $0 \le t \le 2\pi$

   b) Vi har gitt følgende kurve i polarkoordinater (se figur 2.2):

   $$r = 4\sin(2\theta)$$

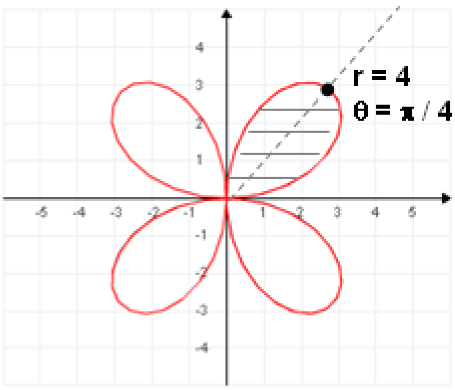


Fig 2.2

   Bestem arealet av den ene sløyfen (den skraverte sløyfen i første kvadrant).

3. Bestem masse-senteret (ofte kalt tyngdepunktet) til en streng som utgjør halvsirkelbuen $x^2 + y^2 = 4$ i xy-planet med $y \geq 0$ (se figur 3.1).
Massetettheten er gitt ved $\delta(x,y) = x + 3$.

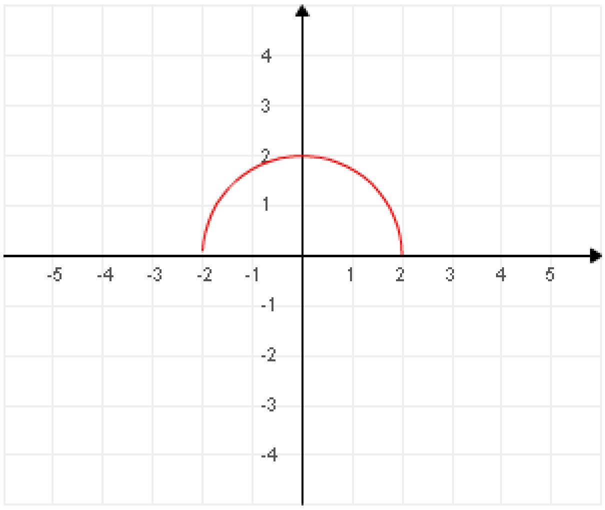


Fig 3.1

4. Vi har gitt et plan $z = 3 - 2y$, en paraboloide $z = x^2 + y^2$ og et vektorfelt gitt ved:

$$\vec{F} = -y\vec{i} + 3x\vec{j} + 5z\vec{k} = [-y, 3x, 5z]$$

a) Tegn en skisse som viser det området D som ligger mellom dette planet og denne paraboloiden.

b) Bestem volumet av D, dvs volumet av det området som ligger nedenfor planet $z = 3 - 2y$ og ovenfor paraboloiden $z = x^2 + y^2$.

c) Bestem curlen (hvirvlingen) og divergensen til det gitte vektorfeltet.

d) Bestem sirkulasjonen

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

hvor C er skjæringskurven som fremkommer ved skjæring mellom planet $z = 3 - 2y$ og paraboloiden $z = x^2 + y^2$ og hvor orienteringen av kurven C er mot klokka sett ovenfra langs z-aksen i retning ned mot xy-planet.

e) Bestem fluksen av det gitte vektorfeltet ut av området D.

f) Bestem fluksen av det gitte vektorfeltet ut av den delen av overflaten av området D som utgjøres av paraboloideflaten.

5. Vi har gitt funksjonen f ved:

$$f(x) = 2.5x \qquad 0 < x < 40$$

a) Utvid funksjonen f ved en såkalt ulik (odde,ujevn) utvidelse gitt ved:

$$f_S(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 40 \\ -f(-x) & -40 < x < 0 \end{cases}$$

og slik at funksjonen f_S blir periodisk med periode 2L = 80.
Tegn grafen til funksjonen f_S.

b) Foreta en Fourier sinus-utvikling (ulik, odde, ujevn utvikling) av funksjonen f_S ved å skrive funksjonen som en Fourier-rekke.

c) Vi har en homogen, jevntykk metallstav med lengde L = 40 cm.
Stavens termiske diffusivitet er gitt ved k = 0.2 cm^2/s.
Staven er varme-isolert på side-overflaten.
Vi varmer opp staven slik at temperaturen øker lineært (jevnt) fra 0 ^0C i den venstre enden til 100 ^0C i den høyre enden.
Ved tiden t = 0 plasseres i begge stavense endepunkter en blanding av is og vann som holder konstant temperatur 0 ^0C.

Varmeligningen for en slik stav er gitt ved:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

der u(x,t) er stavens temperatur (målt i ^0C) i posisjon x (målt i cm) ved tiden t (målt i s).

Løsningen av varmeligningen med de gitte initialbetingelsene er gitt ved:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2 k}{L^2}t} \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Bestem temperaturen i staven etter 3 minutter i posisjon 30 cm fra stavens venstre ende.

.

Løsning:

1. a)

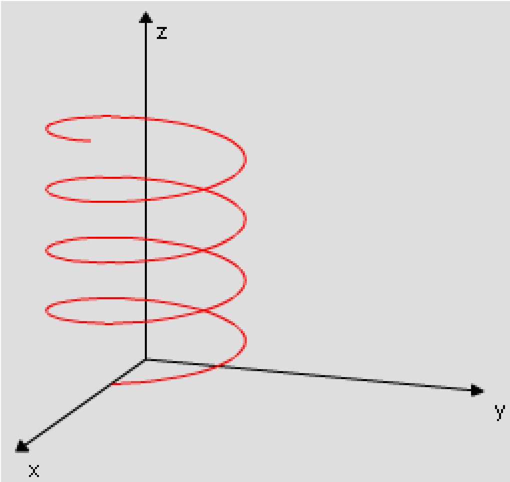
$$\vec{r} = \vec{r}(t) = [1-t, t^2-1, 2t]$$

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \underline{\underline{[-1, 2t, 2]}}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \underline{\underline{[0, 2, 0]}}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{[-1, 2t, 2]}{|[-1, 2t, 2]|} = \frac{[-1, 2t, 2]}{\sqrt{(-1)^2 + (2t)^2 + 2^2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{4t^2+5}}[-1, 2t, 2]}}$$

2. a) Lengden av kurven:



$\vec{r} = \vec{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t, t]$

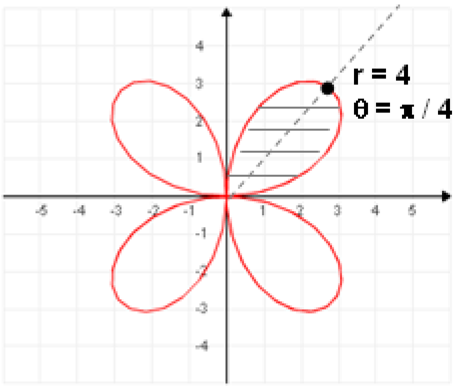
$\vec{r}'(t) = [-2\sin t, 2\cos t, 1]$

$|\vec{r}'(t)| = |[-2\sin t, 2\cos t, 1]| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + 1^2} = \underline{\sqrt{5}}$

$$L = \int_C ds = \int_C \frac{ds}{dt} dt = \int_C |\vec{v}(t)| dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} |\vec{r}'(t)| dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} \sqrt{5} dt = \sqrt{5} \int_{t=0}^{t=2\pi} dt = \sqrt{5}[t]_{t=0}^{t=2\pi} = \sqrt{5} \cdot 2\pi = \underline{\underline{2\sqrt{5}\pi}}$$

b) Arealet av den skraverte sløyfen i første kvadrant:

$r = 4\sin(2\theta)$



$$A = \iint_R dA = \iint_R dxdy = \iint_G J_{\bar{r}} dudv = \iint_G r dr d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=4\sin(2\theta)} r dr d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{r=4\sin(2\theta)} d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(4\sin(2\theta))^2 d\theta$$

$$= 8\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \sin^2(2\theta) d\theta$$

$$= 8\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(4\theta)}{2} d\theta$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} (1-\cos(4\theta)) d\theta = 4\left[\theta - \frac{1}{4}\sin(4\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = 4\cdot\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{2\pi}}$$

Eller:

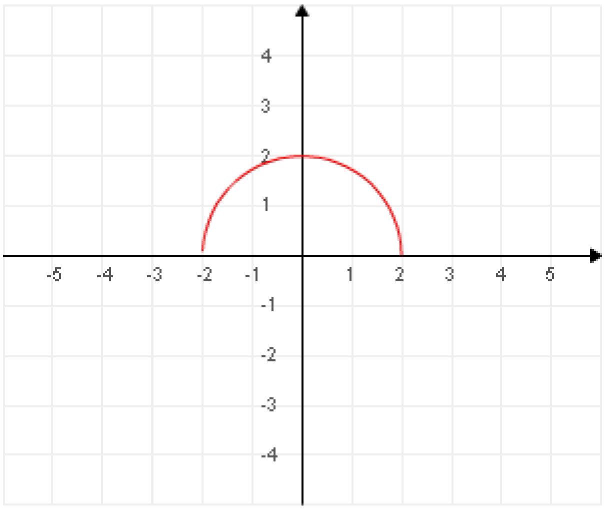
$$A = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r(\theta)^2 d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(4\sin(2\theta))^2 d\theta$$

$$= 8\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \sin^2(2\theta) d\theta$$

$$= 8\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(4\theta)}{2} d\theta$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} (1-\cos(4\theta)) d\theta = 4\left[\theta - \frac{1}{4}\sin(4\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = 4\cdot\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{2\pi}}$$

3.



En glatt parameterisering av kurven C er gitt ved:

$$\vec{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t] \qquad t \in [0, \pi]$$

Den deriverte av r-vektor samt dennes lengde er gitt ved:

$$\vec{r}\,'(t) = [-2\sin t, 2\cos t] \qquad t \in [0, \pi]$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = |[-2\sin t, 2\cos t]| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = 2$$

Massen av strengen er gitt ved:

$$M = \int_C dm = \int_C \delta ds = \int_C \delta \frac{ds}{dt} dt = \int_C \delta |\vec{v}(t)| dt = \int_C \delta |\vec{r}\,'(t)| dt = \int_0^\pi (2\cos t + 3)\cdot 2dt = [4\sin t + 6t]_0^\pi = \underline{6\pi}$$

Massesenterets x-koordinat:

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_C x dm = \frac{1}{M}\int_C x\delta ds = \frac{1}{M}\int_C x\delta \frac{ds}{dt} dt = \frac{1}{M}\int_C x\delta|\vec{v}(t)|dt = \frac{1}{M}\int_C x\delta |\vec{r}\,'(t)|dt = \frac{1}{M}\int_0^\pi 2\cos t(2\cos t + 3)\cdot 2dt$$

$$= \frac{1}{6\pi}\int_0^\pi (8\cos^2 t + 12\cos t)dt$$

$$= \frac{2}{3\pi}\int_0^\pi (2\cos^2 t + 3\cos t)dt$$

$$= \frac{2}{3\pi}\int_0^\pi (2\frac{1+\cos 2t}{2} + 3\cos t)dt$$

$$= \frac{2}{3\pi}\int_0^\pi (1 + \cos 2t + 3\cos t)dt = \frac{2}{3\pi}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t + 3\sin t\right]_0^\pi = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Massesenterets y-koordinat:

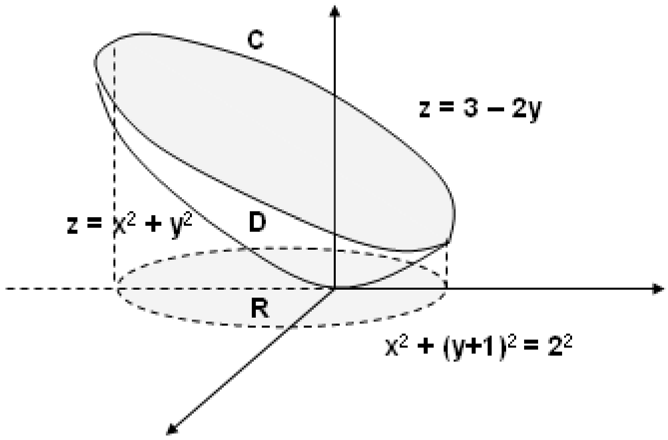
$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_C y dm = \frac{1}{M}\int_C y\delta ds = \frac{1}{M}\int_C y\delta \frac{ds}{dt} dt = \frac{1}{M}\int_C y\delta|\vec{v}(t)|dt = \frac{1}{M}\int_C y\delta |\vec{r}\,'(t)|dt = \frac{1}{6\pi}\int_0^\pi 2\sin t(2\cos t + 3)\cdot 2dt$$

$$= \frac{1}{6\pi}\int_0^\pi (8\sin t\cos t + 12\sin t)dt = \frac{2}{3\pi}\int_0^\pi (2\sin t\cos t + 3\sin t)dt$$

$$= \frac{2}{3\pi}\int_0^\pi (\sin 2t + 3\sin t)dt$$

$$= \frac{2}{3\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t - 3\cos t\right]_0^\pi = \underline{\underline{\frac{4}{\pi}}}$$

4. a) Skisse av området D begrenset av planet $z = 3 - 2y$ og paraboloiden $z = x^2 + y^2$.
C er randkurven som fremkommer ved skjæring mellom planet og paraboloiden.
R er området begrenset av projeksjonen ned i xy-planet av randkurven C.

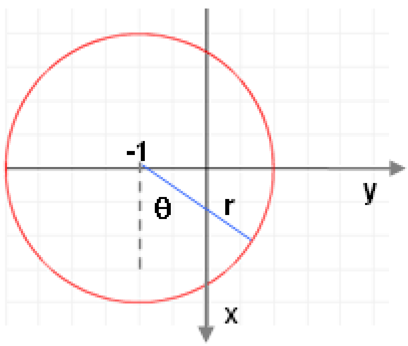


b) Projeksjonen ned i xy-planet av skjæringskurven mellom flaten $z = 3 - 2y$ og paraboloiden $z = x^2 + y^2$ er gitt ved:

$$
\begin{aligned}
&x^2 + y^2 = 3 - 2y \\
&x^2 + y^2 + 2y = 3 \\
&x^2 + y^2 + 2y + 1 - 1 = 3 \\
&x^2 + (y+1)^2 - 1 = 3 \\
&x^2 + (y+1)^2 = 4 \\
&\underline{x^2 + (y+1)^2 = 2^2}
\end{aligned}
$$

Av uttrykket ovenfor ser vi at projeksjonen ned i xy-planet av skjæringskurven mellom den gitte flaten og den gitte paraboloiden er en sirkel med sentrum i (0,-1) og radius 2.

Ved å benytte polarkoordinater med sentrum i (0,-1), kan denne kurven beskrives ved:
$x = r\cos\theta$ $y = -1 + r\sin\theta$ dvs $x = r\cos\theta$ $y+1 = r\sin\theta$.
Dette kan benyttes i overgangen mellom linje 4 og linje 5 i beregningene vist nedenfor.
Eller vi kan i linje nr 4 i beregningene nedenfor foreta en substitusjon $u = x$, $v = y+1$ i dobbelt-integralet.
Jacobideterminanten vil bli lik 1 (det er alltid tilfelle ved en ren translasjon).
Deretter kan vi nå benytte polarkoordinater ved å sette $u = r\cos\theta$ $v = r\sin\theta$.



$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta - 1
\end{aligned}
$$

Volumet av legemet D:

$$V = \iiint_D dV = \iiint_D dxdydz = \iint_R \int_{z=x^2+y^2}^{z=3-2y} dzdxdy = \iint_R [z]_{z=x^2+y^2}^{z=3-2y} dA$$

$$= \iint_R ((3-2y)-(x^2+y^2))dA$$

$$= \iint_R (3-2y-x^2-y^2)dA$$

$$= \iint_R (4-x^2-(y+1)^2)dA$$

$$= \iint_G (4-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2)rdrd\theta$$

$$= \iint_G (4-r^2)rdrd\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=2}(4r-r^3)drd\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left[2r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=2} d\theta$$

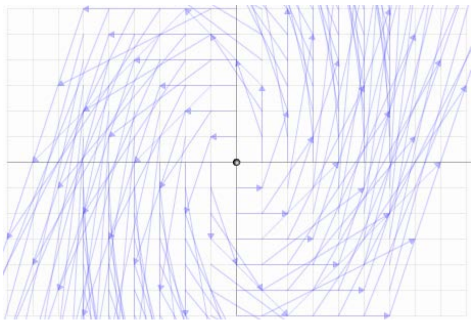
$$= 4\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = 4\cdot[\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 4\cdot 2\pi = \underline{\underline{8\pi}}$$

c) Curl og divergens av det gitte vektorfeltet:

$$\vec{F} = [-y, 3x, 5z]$$

$$\operatorname{curl}\vec{F} = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & 3x & 5z \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(5z)-\frac{\partial}{\partial z}(3x), \frac{\partial}{\partial z}(-y)-\frac{\partial}{\partial x}(5z), \frac{\partial}{\partial x}(3x)-\frac{\partial}{\partial y}(-y)\right] = \underline{\underline{[0,0,4]}}$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]\cdot[-y,3x,5z] = \frac{\partial}{\partial x}(-y)+\frac{\partial}{\partial y}(3x)+\frac{\partial}{\partial z}(5z) = 0+0+5 = \underline{\underline{5}}$$



d) Beregning av sirkulasjonen av vektorfeltet langs kurven C.

Vi benytter Stokes' teorem.
Vi trenger da en flate som har C som rand.
Vi har to nærliggende muligheter, nemlig den delen av den plane flaten $z = 3 - 2y$ som ligger innenfor randen C og den delen av paraboloide-overflaten $z = x^2 + y^2$ som ligger nedenfor planet $x = 3 - 2y$.
Av disse to mulighetene vil den førstnevnte plane flaten være det enkleste valget.
Vi trenger en normalvektor til den plane flaten $z = 3 - 2y$.
La funksjonen $f = f(x,y,z)$ være gitt ved:

$$f(x,y,z) = 2y+z$$

Planet $z = 3 - 2y$ vil nå være en nivåflate til f, nemlig nivåflaten $f(x,y,z) = 3$.
Gradienten til f vil derfor være en normalvektor til planet $z = 3 - 2y$.

$$\text{grad } f = \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right] = \underline{[0,2,1]}$$

Denne normalvektoren vil ha retning ut av den positive siden av flaten som har C som rand.
Når vi beveger oss langs kurven C i retning mot klokka sett i retning nedover langs z-aksen, vil vi ha den positive delen av flaten (fra planet $z = 3 - 2y$) på venstre side.

Lengden av denne normalvektoren er gitt ved:

$$|\nabla f| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \underline{\sqrt{5}}$$

Bruk av Stokes' teorem:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint (\text{curl}\vec{F}) \cdot \vec{n} dS$$

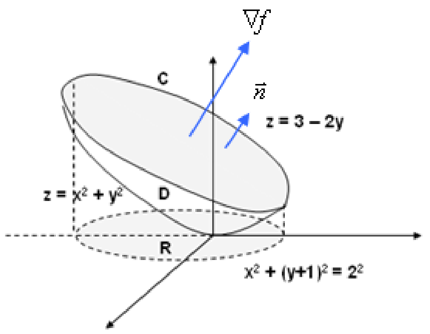
$$= \iint_R (\nabla \times \vec{F}) \cdot \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dR$$

$$= \iint_R (\nabla \times \vec{F}) \cdot \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \vec{k}|} dR$$

$$= \iint_R [0,0,4] \cdot \frac{[0,2,1]}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{|[0,2,1] \cdot [0,0,1]|} dR$$

$$= \iint_R (0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{|0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1|} dR$$

$$= \iint_R 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{1} dR = 4\iint_R dR = 4 \underbrace{\iint_R dR}_{\text{Arealet av R}} = 4 \cdot \pi \cdot 2^2 = \underline{\underline{16\pi}}$$



e) Fluksen av vektorfeltet ut av området D.
Vi benytter divergensteoremet.

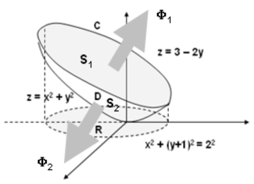
$$\Phi = \oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_D \mathrm{div}\vec{F}\,dV = \iiint_D 5\,dV = 5\underbrace{\iiint_D dV}_{\text{Volumet av D}} = 5\cdot 8\pi = \underline{\underline{40\pi}}$$

f) Bestemmelse av fluksen av det gitte vektorfeltet ut av den delen av overflaten av området D som utgjøres av paraboloideflaten.
Vi bestemmer først fluksen ut av flaten S_1 som er den delen av den plane flaten $z = 3 - 2y$ som er begrenset av kurven C.

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_R \vec{F}\cdot\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot\vec{p}|}\,dR \\
&= \iint_R \vec{F}\cdot\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot\vec{k}|}\,dR \\
&= \iint_R [-y,3x,5z]\cdot\frac{[0,2,1]}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{|[0,2,1]\cdot[0,0,1]|}\,dR \\
&= \iint_R (-y\cdot 0 + 3x\cdot 2 + 5z\cdot 1)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{|0\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 1|}\,dR \\
&= \iint_R (6x+5z)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{1}\,dR \\
&= \iint_R (6x+5z)\,dR \\
&= \iint_R (6x+5(3-2y))\,dR \\
&= \iint_R (6x-10y+15)\,dR \\
&= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=2} (6(r\cos\theta) - 10(-1+r\sin\theta)+15)\,r\,dr\,d\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=2} (6r^2\cos\theta - 10r^2\sin\theta + 25r)\,dr\,d\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left[2r^3\cos\theta - \frac{10}{3}r^3\sin\theta + \frac{25}{2}r^2\right]_{r=0}^{r=2} d\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} (16\cos\theta - \frac{80}{3}\sin\theta + 50)\,d\theta \\
&= \left[16\sin\theta + \frac{80}{3}\cos\theta + 50\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\
&= 16\cdot(0-0) + \frac{80}{3}\cdot(1-1) + 50\cdot 2\pi \\
&= \underline{100\pi}
\end{aligned}$$

Fluksen av det gitte vektorfeltet ut av den delen av overflaten av området D som utgjøres av paraboloideflaten er nå gitt ved differensen mellom den totale fluksen ut av området D minus fluksen ut av flaten S_1 som er den delen av den plane flaten $z = 3 - 2y$ som er begrenset av kurven C.

$\Phi_2 = \Phi - \Phi_1 = 40\pi - 100\pi = \underline{\underline{-60\pi}}$



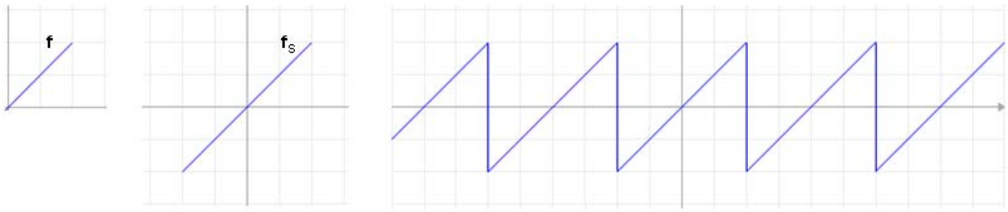
5. a) $f(x)=Ax$ hvor $A = 2.5$

Vi skal foreta en Fourier sinus-utvikling av denne funksjonen f.

a) Utvid funksjonen f ved en såkalt ulik (odde) utvidelse gitt ved:

$$f_S(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 40 \\ -f(-x) & -40 < x < 0 \end{cases}$$

Ved en Fourier sinus-utvikling vil alle a-koeffisientene være lik null.



b) Fourier sinus-rekke

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

hvor

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Med f(x) = Ax får vi videre:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

hvor

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_0^L Ax\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L Ax\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2A}{L}\int_0^L x\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{2AL}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi} u\sin(u)du \qquad \text{substitusjon} \quad u = \frac{n\pi x}{L}$$

$$= \frac{2AL}{n^2\pi^2}\left[\left[-u\cos(u)\right]_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi}\cos(u)du\right] \qquad \text{delvis integrasjon}$$

$$= \frac{2AL}{n^2\pi^2}\left[-u\cos(u) + \sin(u)\right]_0^{n\pi}$$

$$= -\frac{2AL}{n^2\pi^2}\left[n\pi\cos(n\pi)\right]$$

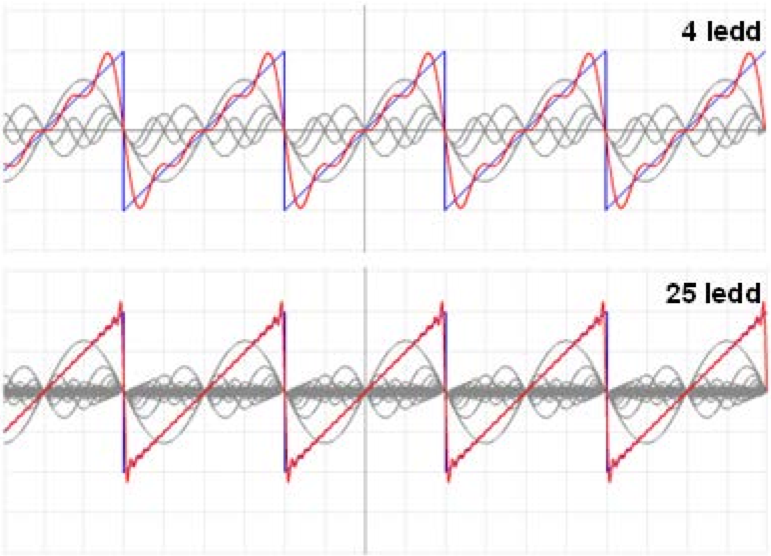
$$= -\frac{2AL}{n\pi}\left[\cos(n\pi)\right]$$

$$= -\frac{2AL}{n\pi}(-1)^n$$

$$= \frac{2AL}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

5b forts)

$$b_n = \frac{2AL}{n\pi}(-1)^{n+1}$$
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{L} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2AL}{n\pi}(-1)^{n+1}\right]\sin\frac{n\pi t}{L}$$



Konklusjon for 5b:

Funksjonen f(x) er først utvidet til en ulik (odde) funksjon $f_S(x)$.
Deretter er denne funksjonen periodisert
slik at vi kan benytte en Fourierutvikling (her Fouriersinusutvikling).
Resultatet vises øverst på denne siden hvor f(x) er skrevet som en uendelig sum av sinus-ledd (cosinus-leddene forsvinner ved en ulik (odde) funksjon).
I de to figurene ovenfor vises denne summen (tilnærmingen til f, rød farge)) hvor det er tatt med henholdsvis 4 og 25 ledd i rekken.
Jo flere ledd i rekken som tas med, jo mer vil rekkesummen nærme seg den periodiserte funksjone f.
Periodiseringen er utført for å kunne benytte Fourierrekkeutvikling, men det er kun tilnærmingen av den opprinnelige funksjonen f ($0<x<40$)
som er av interesse i denne oppgaven.
De grå grafene i figurene ovenfor er de enkelte ledd i Fourierrekken.
Det er summen av alle disse grå funksjonene som til sammen danner tilnærmingen til funksjonen f (rød funksjon).

c) Fra varmeligningen har vi nå:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2 kt}{L^2}} \sin\frac{n\pi x}{L}$$

hvor

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$
$$= \frac{2AL}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

A = 2.5   L = 40

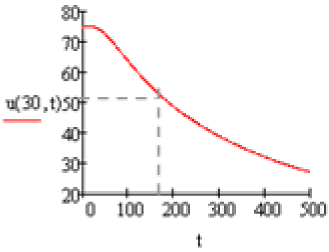
Temperaturn u som funksjon av posisjonen x og tiden t
(her er tatt med 200 ledd i rekken):

$$u(x,t) := \sum_{n=1}^{200}\left[\frac{(2\cdot 2.5\cdot 40)}{(n\cdot\pi)}\cdot(-1)^{n+1}\cdot e^{-n^2\cdot\pi^2\cdot 0.2\cdot\frac{t}{40^2}}\cdot\sin\left(n\cdot\pi\cdot\frac{x}{40}\right)\right]$$

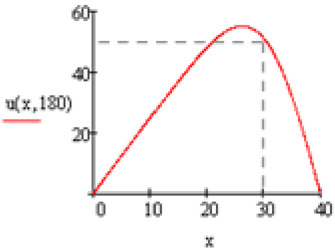
$u(30,180) = 51.141$

=====

Temperaturn u (i grader Celsius)
i posisjon x (30 cm) ved tiden t (180 sekunder)



Temperaturen u
som funksjon av tiden t
for x = 30 cm



Temperaturen u
som funksjon av posisjonen x
for t = 180 sekunder