UNIVERSITETET I AGDER
Grimstad

E K S A M E N S O P P G A V E :

FAG: MA-209 Matematikk 3 LÆRER: Per Henrik Hogstad

Klasse(r):	**Dato: 08.05.12**	**Eksamenstid, fra-til: 09.00 – 14.00**	
Eksamensoppgaven består av følgende	**Antall sider: 5 (inkl. forside + vedlegg)**	**Antall oppgaver: 3**	**Antall vedlegg: 1**
Tillatte hjelpemidler er:	**Kalkulator Hogstad: Formler MA-209 Haugan: Formler og tabeller Gyldendals formelsamling (Ikke tillatt å skrive i formelsamlingene)**		
KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG			

MA-209   Ordinær Eksamen Vår 2012

Oppg nr		Poeng
1	a	3
	b	3
	c	3
2	a	3
	b	3
	c	3
3	a	3
	b	3
	c	3
	d	3
	e	3
	f	3
	g	3
	h	3
Sum		42

Poengene viser vekt-fordelingen for de enkelte del-spørsmålene.
Ved karaktersetting vektlegges selvfølgelig i tillegg en total-vurdering, bl.a. en vurdering av i hvilken grad kandidaten har kunnskaper innenfor de ulike områdene gitt i oppgave-settet.

LYKKE TIL !

1. a) Vi har gitt følgende kurve *C* i rommet:

$$\vec{r}(t) = [3\cos t, 3\sin t, t] \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Beregn lengden av kurven *C*.

b) Beregn dobbeltintegralet

$$\int_2^e \int_{\ln x}^1 \frac{2xy}{e^y + 2} \, dydx$$

ved å bytte om integrasjonsrekkefølgen.

Vis ved hjelp av en figur hvilket område det integreres over.

c) La *R* være trapeset i *xy*-planet med hjørner (1,1), (2,2), (4,0) og (2,0).
Beregn dobbeltintegralet

$$\iint_R \sin\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy$$

ved hjelp av følgende substitusjon:

$$u = x - y$$
$$v = x + y$$

Vis ved hjelp av en figur hvilket område *R* det integreres over i *xy*-planet og hvilket tilhørende område *G* det integreres over i *uv*-planet.

2. Figur 2.1 viser en modell av en idrettshall i et *xyz*-koordinatsystem.
I modellen er sideveggen en del av sylinderflaten $x^2 + y^2 = 1$,
gulvet er den delen av *xy*-planet som ligger innenfor sylinderflaten
og taket er den delen av flaten $z = 1 + xy$ som ligger innenfor sylinderflaten.

a) Beregn volumet av modellen.

b) Beregn arealet av taket av modellen.

c) Beregn arealet av sideveggen i modellen.

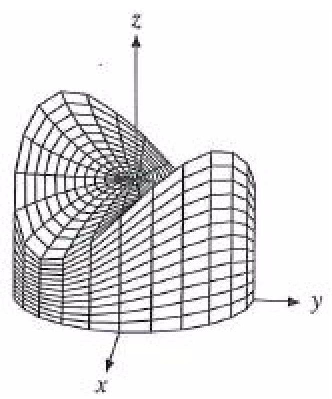


Fig 2.1

3. La V være legemet begrenset av følgende to flater:

$$z = x^2 + y^2 \qquad z \le 4$$
$$z = 4$$

Kurven C er skjæringen mellom disse to flatene.
Denne kurven er orientert i retning mot klokka sett ovenfra nedover langs z-aksen.

La S være overflaten av legemet V.
La S_1 være overflaten av den plane flaten på toppen av legemet V.
La S_2 være overflaten av den krumme sideflaten av legemet V.

Vi har i tillegg gitt følgende vektorfelt:

$$\vec{F}(x, y, z) = [y, z, 2z]$$

a) Tegn en skisse av legemet V og bestem volumet av dette legemet.

b) Bestem divergens og curl til det gitte vektorfeltet.

c) Bestem kurveintegralet

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

uten bruk av Stokes teorem.

d) Bestem kurveintegralet i c) ved hjelp av Stokes teorem.

e) Benytt Gauss' divergensteorem

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV$$

til å bestemme fluksen av det gitte vektorfeltet ut av overflaten S til legemet V.

f) Bestem fluksen av det gitte vektorfeltet ut av den krumme sideflaten S_2 til legemet V.

Det finnes ulike alternative former for Gauss' divergensteorem.
Ett av disse alternativene er at F-vektor byttes ut med en skalar funksjon φ
og at skalarmultiplikasjon byttes ut med vanlig multiplikasjon:

$$\oiint_S \varphi \vec{n} dS = \iiint_V \nabla \varphi dV$$

I motsetning til Gauss' originale divergensteorem, så er denne alternative formen
en vektorligning (begge sider av likhetstegnet er en vektor).

Vi skal benytte denne alternative formen til å vise Archimedes' lov.

Archimedes' lov sier følgende:
Når et legeme senkes ned i en væske, vil oppdriften på legemet (kraften fra væsken på legemet)
være lik tyngden av fortrengt væskemengde.

La oss tenke oss et kar med væske (eks. vann).
Vi plasserer en z-akse vertikalt oppover med origo i bunnen av karet.
La p_0 være trykket på toppen av væsken, dvs p_0 er lik lufttrykket over væsken
og la z_0 være posisjonen (høyden til toppen av væsken, dvs høyden opp til væskeoverflaten).
Trykket p i en høyde z i væsken er da gitt ved:

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z)$$

hvor ρ er tettheten av væsken (ρ betraktes som konstant i hele væsken)
og g er tyngdeakselerasjonen.

g) Bestem gradienten til den skalare funksjonen p.

La nå trykket p (kraften pr areal) være trykket i høyden z på et legeme nedsenket i en væske.
Kraften på et infinitesimalt flateelement dS av dette nedsenkede legemet vil nå være gitt ved:

$$p(-\vec{n})dS$$

hvor n-vektor er enhetsnormalvektor *ut* av av legemet
(minus-tegnet skyldes at kraften fra væsken virker normalt *innover* mot legemet).

Oppdriften på legement (netto sum av kraften fra væsken på legemet) vil nå være lik
integralet av dette sistnevnte uttrykket over hele legemets overflate.

h) Bruk den nevnte alternative formen av Gauss' divergensteorem til å vise
at oppdriften er lik tyngden av fortrengt væskemengde
og at denne nettokraften er rettet vertikalt oppover.

Løsning:

1. a) Kurven C i rommet:

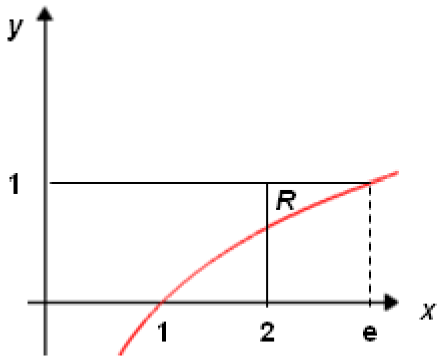
$$\vec{r}(t) = [3\cos t, 3\sin t, t] \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Lengden av kurven C:

$$\vec{r}(t) = [3\cos t, 3\sin t, t]$$
$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = [-3\sin t, 3\cos t, 1]$$
$$|\vec{v}(t)| = |\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 1}$$
$$= \sqrt{9(\sin^2 t + \cos^2 t) + 1} = \sqrt{9 \cdot 1 + 1} = \sqrt{9+1} = \underline{\sqrt{10}}$$

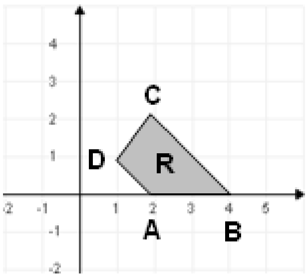
$$L = \int_C ds = \int_C \frac{ds}{dt} dt = \int_C v dt = \int_C |\vec{v}(t)| dt = \int_C |\vec{r}\,'(t)| dt = \int_C \sqrt{10} dt = \sqrt{10} \int_C dt$$
$$= \sqrt{10} \int_0^{2\pi} dt = \sqrt{10} \cdot [t]_0^{2\pi} = \sqrt{10} \cdot 2\pi = \underline{\underline{2\pi\sqrt{10}}}$$

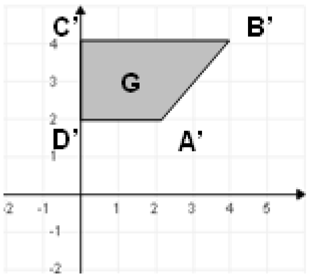
b)



$$\int_2^e \int_{\ln x}^1 \frac{2xy}{e^y+2} dy dx = \int_{\ln 2}^1 \int_2^{e^y} \frac{2xy}{e^y+2} dx dy = \int_{\ln 2}^1 \left[\frac{x^2 y}{e^y+2} \right]_2^{e^y} dy =$$
$$= \int_{\ln 2}^1 \left(\frac{(e^y)^2 y}{e^y+2} - \frac{2^2 y}{e^y+2} \right) dy = \int_{\ln 2}^1 \frac{y(e^{2y}-4)}{e^y+2} dy = \int_{\ln 2}^1 \frac{y(e^y-2)(e^y+2)}{e^y+2} dy$$
$$= \int_{\ln 2}^1 y(e^y-2) dy = \int_{\ln 2}^1 (ye^y - 2y) dy$$
$$= \int_{\ln 2}^1 ye^y dy - \int_{\ln 2}^1 2y dy \qquad u = y \quad dv = e^y dy \quad du = dy \quad v = e^y$$
$$= [ye^y]_{\ln 2}^1 - \int_{\ln 2}^1 e^y dy - \int_{\ln 2}^1 2y dy = [ye^y]_{\ln 2}^1 - [e^y]_{\ln 2}^1 - [y^2]_{\ln 2}^1$$
$$= (e - e^{\ln 2} \ln 2) - (e^1 - e^{\ln 2}) - (1^2 - (\ln 2)^2)$$
$$= (e - 2\ln 2) - (e - 2) - (1 - (\ln 2)^2)$$
$$= e - 2\ln 2 - e + 2 - 1 + (\ln 2)^2$$
$$= 1 - 2\ln 2 + (\ln 2)^2$$
$$= \underline{\underline{(1 - \ln 2)^2}}$$

c) Integrasjonsområdene *R* og *G*:





Bestemmelse av Jacobi-determinant i forbindelse med variabelskifte:

$$u = x - y$$
$$v = x + y$$
$$\Downarrow$$
$$J_{\vec{r}^{-1}} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 1 + 1 = \underline{2}$$
$$J_{\vec{r}} = \frac{1}{J_{\vec{r}^{-1}}} = \underline{\frac{1}{2}}$$

Integralbestemmelse:

$$\iint_R \sin\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy = \iint_G \sin\left(\frac{u}{v}\right) |J_{\vec{r}}| dudv = \iint_G \sin\left(\frac{u}{v}\right) \left|\frac{1}{2}\right| dudv$$
$$= \frac{1}{2} \int_{v=2}^{v=4} \int_{u=0}^{u=v} \sin\left(\frac{u}{v}\right) dudv = \frac{1}{2} \int_{v=2}^{v=4} \left[-v \cos\left(\frac{u}{v}\right) \right]_{u=0}^{u=v} dv$$
$$= \frac{1}{2} \int_{v=2}^{v=4} (v - v\cos 1) dv = \frac{1}{2} (1 - \cos 1) \int_{v=2}^{v=4} v dv$$
$$= \frac{1}{2} (1 - \cos 1) \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_{v=2}^{v=4} = \frac{1}{2} (1 - \cos 1) \frac{1}{2} (16 - 4) = \underline{\underline{3(1 - \cos 1)}}$$

2. a) Volum:

$$V = \iiint_V dV = \iint_A \int_{z=0}^{1+xy} dz dA = \iint_A [z]_{z=0}^{z=1+xy} dA = \iint_A (1+xy) dA$$
$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} (1 + r\cos\theta \cdot r\sin\theta) r dr d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} (r + r^3 \cos\theta \sin\theta) dr d\theta$$
$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{4}r^4 \cos\theta \sin\theta\right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos\theta\sin\theta\right] d\theta$$
$$= \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{8}\sin^2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \underline{\underline{\pi}}$$

Eller:

$$V = \iiint_V dV = \iint_A \int_{z=0}^{1+xy} dz dA = \iint_A [z]_{z=0}^{z=1+xy} dA = \iint_A (1+xy) dA$$
$$= \iint_A dA + \iint_A xy dA = \iint_A dA + 0 = \iint_A dA = \pi \cdot 1^2 = \underline{\underline{\pi}}$$

Integralleddet med integrand *xy* blir null pga symmetrien til *xy* og området *A*.

b) Areal av taket:

Vi bestemmer først en skalarfunksjon *f* som har taket av idrettshallmodellen som en nivåflate.
Ved å sette $f(x,y,z) = z-1-xy$, så vil taket av idrettshallmodellen være gitt ved nivåflaten $f(x,y,z) = 0$.
Gradienten til *f* vil da være en normalvektor til taket av idrettshallmodellen.

$$f(x,y,z) = z - 1 - xy$$
$$\nabla f = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] f = \left[\frac{\partial}{\partial x}(z-1-xy), \frac{\partial}{\partial y}(z-1-xy), \frac{\partial}{\partial z}(z-1-xy)\right] = \underline{[-y, -x, 1]}$$
$$|\nabla f| = \sqrt{(-y)^2 + (-x)^2 + 1^2} = \underline{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$

$$A = \iint_S dS = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA = \iint_R \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{|[-y,-x,1]\cdot[0,0,1]|} dA = \iint_R \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{1} dA$$
$$= \iint_R \sqrt{1+x^2+y^2} dA = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} \sqrt{1+r^2} r dr d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} r\sqrt{1+r^2} dr d\theta$$
$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[\frac{1}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \left(\frac{1}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\right) \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = \left(\frac{1}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\right)\cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)}}$$

c) Arealet av sideveggen:

Vi parameteriserer veggen i idrettshallmodellen.

$$\vec{r} = \vec{r}(\theta, z) = [\cos\theta, \sin\theta, z]$$
$$\vec{r}_\theta = \vec{r}_\theta(\theta, z) = [-\sin\theta, \cos\theta, 0]$$
$$\vec{r}_z = \vec{r}_z(\theta, z) = [0,0,1]$$
$$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [\cos\theta - 0, 0 + \sin\theta, 0 - 0] = [\cos\theta, \sin\theta, 0]$$
$$|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$$

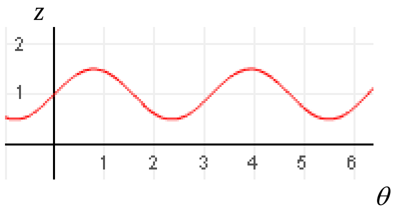
$$A = \iint_{S_2} dS = \iint_G |\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z| d\theta dz = \iint_G d\theta dz = \int_{\theta=0}^{\pi=2\pi} \int_{z=0}^{z=1+\cos\theta\cdot\sin\theta} dz \; d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi=2\pi} [z]_{z=0}^{z=1+\cos\theta\cdot\sin\theta} d\theta$$
$$= \int_{\theta=0}^{\pi=2\pi} ((1+\cos\theta\sin\theta)) d\theta = \left[\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \underline{\underline{2\pi}}$$

Eller:
Vi kan dobbeltintegrere det infinitesimale flateelementet $dS = 1 \cdot d\theta \cdot dz = d\theta dz$ over hele sideveggen i idrettshallmodellen.

$$dS = 1 \cdot d\theta \cdot dz = d\theta dz$$

$$A = \iint_{S_2} dS = \iint_G d\theta dz = \int_{\theta=0}^{\pi=2\pi} \int_{z=0}^{z=1+\cos\theta\cdot\sin\theta} dz \; d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi=2\pi} [z]_{z=0}^{z=1+\cos\theta\cdot\sin\theta} d\theta$$
$$= \int_{\theta=0}^{\pi=2\pi} ((1+\cos\theta\sin\theta)) d\theta = \left[\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \underline{\underline{2\pi}}$$

Eller:
Bretter ut sideveggen.



$$z = 1 + xy = 1 + r\cos\theta \cdot r\sin\theta = 1 + r^2\sin\theta\cos\theta = 1 + \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \sin 2\theta = 1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta$$
$$A = \int_0^{2\pi}\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta + \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin 2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta + 0 = \int_0^{2\pi} d\theta = \underline{\underline{2\pi}}$$

Eller pga symmetri (se fig ovenfor):

$$A = 2\pi \cdot 1 = \underline{\underline{2\pi}}$$

3. a) Volumet av legemet:

$z = x^2 + y^2 \qquad\qquad z \le 4$

$z = 4$

$$V = \iiint_V dV = \iint_R \int_{z=x^2+y^2}^{z=4} dz dA = \iint_R [z]_{z=x^2+y^2}^{z=4} dA = \iint_R \left(4-(x^2+y^2)\right) dA$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=2} \left(4-r^2\right) r dr d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=2} \left(4r-r^3\right) dr d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left[2r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=2} d\theta$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = 4[\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 4\cdot 2\pi = \underline{\underline{8\pi}}$$

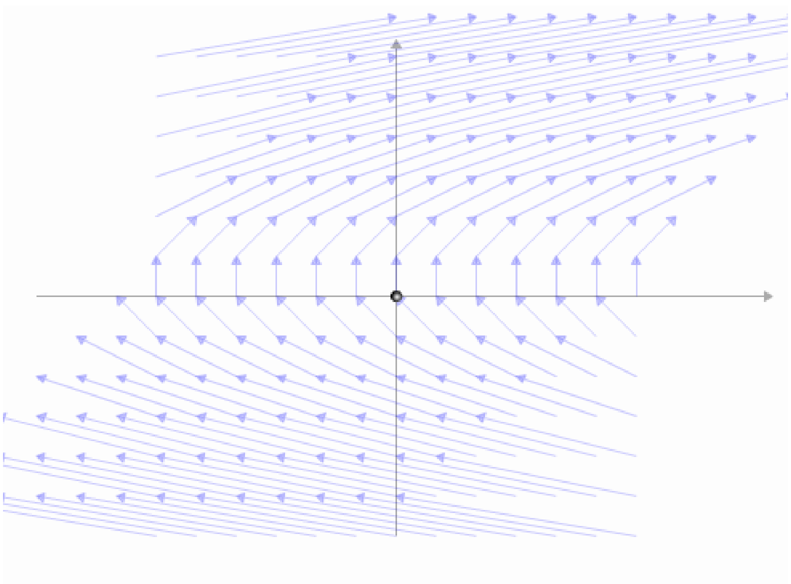
b) Divergens:

$$div\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]\cdot[y,z,2z] = \frac{\partial}{\partial x}(y)+\frac{\partial}{\partial y}(z)+\frac{\partial}{\partial z}(2z) = 0+0+2 = \underline{\underline{2}}$$

Curl:

$$curl\vec{F} = \nabla\times\vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]\times[y,z,2z]$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & 2z \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(2z)-\frac{\partial}{\partial z}(z),\frac{\partial}{\partial z}(y)-\frac{\partial}{\partial x}(2z),\frac{\partial}{\partial x}(2z)-\frac{\partial}{\partial y}(y)\right] = [0-1,0-0,0-1] = \underline{\underline{[-1,0,-1]}}$$



Projeksjonen ned i *xy*-planet av vektorfeltet for *z* = 1.

c) Kurveintegral uten Stokes teorem:

$$\vec{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t, 4]$$
$$d\vec{r}(t) = [-2\sin t, 2\cos t, 0]dt$$
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C [2\sin t, 4, 8] \cdot [-2\sin t, 2\cos t, 0]dt = \oint_C \left(-4\sin^2 t + 8\cos t + 0\right)dt$$
$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} \left(-4 \cdot \frac{1-\cos 2t}{2} + 8\cos t\right)dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} (2\cos 2t - 2 + 8\cos t)dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} (2\cos 2t + 8\cos t - 2)dt$$
$$= [\sin 2t + 8\sin t - 2t]_{t=0}^{t=2\pi} = -2 \cdot 2\pi = \underline{\underline{-4\pi}}$$

d) Kurveintegral med Stokes teorem:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} ds = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$
$$= \iint_{S_1} \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} [-1, 0, -1] \cdot [0, 0, 1] dS = -\iint_{S_1} dS = -\pi \cdot 2^2 = \underline{\underline{-4\pi}}$$

e) Fluksen av vektorfeltet ut av overflaten S av legemet V:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \iiint_V 2dV = 2\iiint_V dV = 2 \cdot 8\pi = \underline{\underline{16\pi}}$$

f) Fluksen ut av toppflaten S_1 av legemet:

$$\iint_{s_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{s_{11}} [y, z, 2z] \cdot [0, 0, 1] dS$$
$$= \iint_{s_1} [y, 4, 2 \cdot 4] \cdot [0, 0, 1] dS = \iint_{s_1} [y, 4, 8] \cdot [0, 0, 1] dS = \iint_{s_1} 8dS = 8\iint_{s_1} dS = 8 \cdot \pi \cdot 2^2 = \underline{\underline{32\pi}}$$

Fluksen av vektorfeltet ut av sideflaten S_2 av legemet:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{s_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{s_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$
$$\iint_{s_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS - \iint_{s_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 16\pi - 32\pi = \underline{\underline{-16\pi}}$$

g) Gradienten til trykket p:

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z)$$

$$\nabla p = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] p = \left[\frac{\partial}{\partial x}\big(p_0 + \rho g(z_0 - z)\big), \frac{\partial}{\partial y}\big(p_0 + \rho g(z_0 - z)\big), \frac{\partial}{\partial z}\big(p_0 + \rho g(z_0 - z)\big)\right]$$
$$= [0, 0, \rho g \cdot (-1)] = -\rho g[0,0,1] = \underline{\underline{-\rho g \vec{k}}}$$

h) Oppdriften B:
Vi lar n_1-vektor være enhetsnormalvektor *inn* mot en infinitesimal flate dS av legemet.
Kraften fra væsken inn mot denne infinitesimale flaten vil da ha størrelse pdS
og ha retning langs n_1-vektor.
La n-vektor være enhetsnormalvektoren på den infinitesimale flaten dS med retning normalt *ut* fra flaten dS.
n-vektor er da den vektoren som inngår i Gauss' teorem (både original og alternativ form).
Oppdriften B-vektor vil nå være lik vektorsummen av alle slike infinitesimale krefter (med størrelse pdS og retning inn mot legemet), dvs dobbeltintegralet over hele overflaten av legemet av pdS multiplisert med n_1-vektor.
Til beregning av dette dobbeltintegralet benytter vi nå den nevnte alternative formen av Gauss' teorem.

$$\vec{B} = \oint\!\!\oint_S p\vec{n}_1 dS = \oint\!\!\oint_S p(-\vec{n}) dS = -\oint\!\!\oint_S p\vec{n} dS$$
$$= -\iiint_V \nabla p dV = -\iiint_V \left(-\rho g\vec{k}\right) dV = \iiint_V \rho g\vec{k} dV = \rho g\vec{k}\iiint_V dV = \rho g\vec{k} V = \rho V g\vec{k} = \underline{\underline{mg\vec{k}}}$$