**UNIVERSITETET I AGDER**
**Grimstad**

# E K S A M E N S O P P G A V E :

**FAG: MA-209 Matematikk 3** **LÆRER: Per Henrik Hogstad**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Klasse(r):** | **Dato: 24.05.13** | **Eksamenstid, fra-til: 09.00 – 14.00** | |
| **Eksamensoppgaven består av følgende** | **Antall sider: 5 (inkl. forside + vedlegg)** | **Antall oppgaver: 5** | **Antall vedlegg: 1** |
| **Tillatte hjelpemidler er:** | **Kalkulator**<br>**Hogstad: Formler MA-209**<br>**Haugan: Formler og tabeller**<br>**(Ikke tillatt å skrive i formelsamlingene)** | | |
| **KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG** | | | |

**MA-209 Ordinær Eksamen Vår 2013**

| Oppg nr | | Poeng |
|---|---|---|
| 1 | a | 3 |
| | b | 3 |
| 2 | a | 3 |
| | b | 3 |
| | c | 3 |
| | d | 6 |
| | e | 6 |
| 3 | a | 3 |
| | b | 3 |
| 4 | a | 3 |
| | b | 3 |
| 5 | a | 3 |
| | b | 3 |
| Sum | | 45 |

Poengene viser vekt-fordelingen for de enkelte del-spørsmålene.
Ved karaktersetting vektlegges selvfølgelig i tillegg en total-vurdering, bl.a. en vurdering av i hvilken grad kandidaten har kunnskaper innenfor de ulike områdene gitt i oppgave-settet.

LYKKE TIL !

1. Vi har gitt følgende dobbelt-integral

$$\int_{y=0}^{y=2} \int_{x=\frac{1}{2}y}^{x=1} e^{x^2}\, dxdy$$

a) Tegn en skisse som tydelig viser integrasjonsområdet og integrasjonsgrensene.

b) Beregn det gitte dobbelt-integralet ved å skifte integrasjonsrekkefølge.

2. Figur 2.1 viser en kjegle avgrenset av av kjegleflaten $S_2$ og planet $S_1$ gitt ved:

$$S_2: \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad\qquad S_1: \quad z = 1$$

Videre har vi gitt følgende vektorfelt:

$$\vec{F} = \left[x^2, y^2, z^2\right]$$

a) Bestem divergens og curl til det gitte vektorfeltet.

b) Bruk Gauss' divergensteorem til å bestemme nettofluksen av det gitte vektorfeltet ut av den lukkede flaten $S = S_1 \cup S_2$ som omslutter hele kjegle-legemet.

c) Bestem nettofluks av det gitte vektorfeltet ut fra sideflaten $S_2$ av kjeglen.

La $C$ være den lukkede kurven som fremkommer ved skjæring av sideflaten $S_2$ av kjeglen og planet $y + 2z = 1$.
La $S_3$ være den delen av flaten $y + 2z = 1$ som er innenfor $C$, dvs har $C$ som rand.
Kurven $C$ har positiv omløpsretning mot klokka sett ovenfra nedover langs $z$-aksen.

Videre har vi gitt følgende vektorfelt:

$$\vec{G} = [-y, x, 2]$$

d) Bestem kurve-integralene

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad \text{og} \qquad \oint_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$$

direkte uten bruk av Stokes' teorem.

e) Samme oppgave som spørsmål d), men denne gang beregning vha Stokes' teorem.

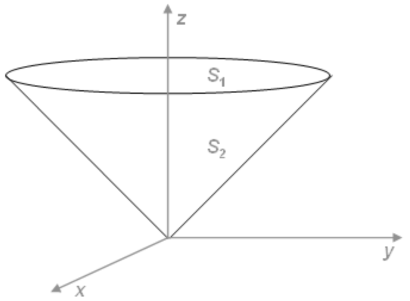


Fig 2.1

3. Figur 3.1 viser et flatestykke *S* i første kvadrant avgrenset av randkurven *C* som består av deler av grafene til ligningene $y = 0$, $x = 2$, $y = 1/x$ og $y = x$. Den lukkede kurven *C* skal gjennomløpes i retning mot klokka (positiv omløpsretning).

   a) Bestem en glatt parameterisering for hvert av de fire kurvestykkene som den lukkede kurven *C* er sammensatt av. Spesifiser tydelig parameterintervall for hvert av de fire kurvestykkene. Hver av de fire parameteriserte kurvene skal gjennomløpes i positiv retning for økende parameterverdi, og parameterverdien skal starte på 0 for hver av delkurvene.

   b) Benytt følgende Greens formel for arealberegning

   $$A = -\oint_C y\,dx$$

   til å bestemme arealet av flatestykket *S*.

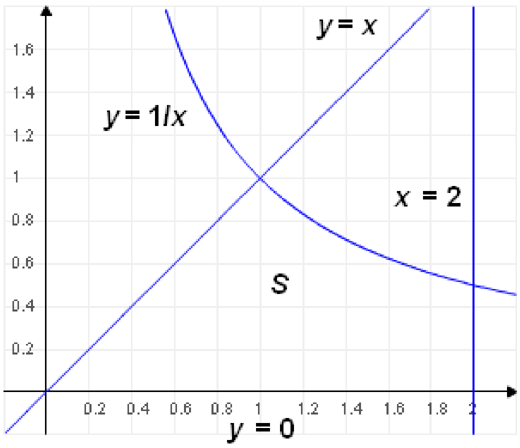



Fig 3.1

4. Vi har gitt følgende partielle differentialligning:

   $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2xy^2 + \cos(x)$$

   a) Bestem den generelle løsningen av den gitte differentialligningen.

   b) Bestem en partikulær løsning av den gitte differentialligningen som oppfyller følgende to tilleggsbetingelser:

   $$z(x,0) = x^3$$
   $$z(\pi, y) = \sin(y)$$

5. Vis følgende egenskaper knyttet til del-operatoren:

   a)
   $\nabla.\left(f\vec{F}\right) = (\nabla f)\cdot\vec{F} + f\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)$ hvor $f$ er en skalarfunksjon og $\vec{F}$ en vektorfunksjon

   b)
   $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3}\vec{r}$ hvor $r$ er lik lengden av $\vec{r} = [x, y, z]$ $r = |\vec{r}|$

**Vedlegg**:

$\cos^2 u + \sin^2 u = 1$

$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$

$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$

$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$

$\sin 2u = 2 \sin u \cos$

$\cos^2 u = \dfrac{1 + \cos 2u}{2}$

$\sin^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{2}$

$(\cos u)' = -\sin u$

$(\sin u)' = \cos u$

$(\cosh u)' = \sinh u$

$(\sinh u)' = \cosh u$

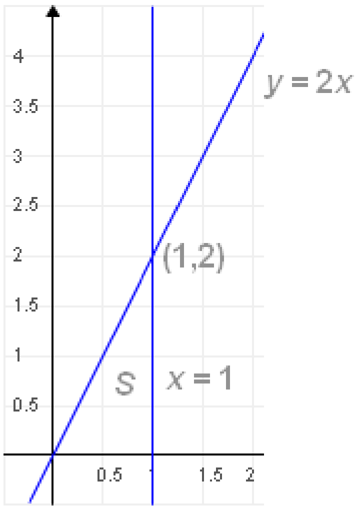
$e^{\ln x} = x$

$(e^x)' = e^x$

$\int u dv = uv - \int v du$

Løsning:

1. a) Integrasjonsområde $S$:




Integrasjonsområdet $S$ bestemmes av de nedre og øvre grensene i integralene (integranden har ingen betydning for avgrensning av integrasjonsområdet).
Integrasjons-området $S$ er begrenset av $x = 1/2y$ (skrålinjen $y = 2x$),
$x = 1$ (vertikal linje i posisjon $x = 1$), $y = 0$ ($x$-aksen) og $y = 2$ (horisontal linje i høyde 2).

b) Beregning av dobbelt-integralet ved skifte av integrasjonsrekkefølge:

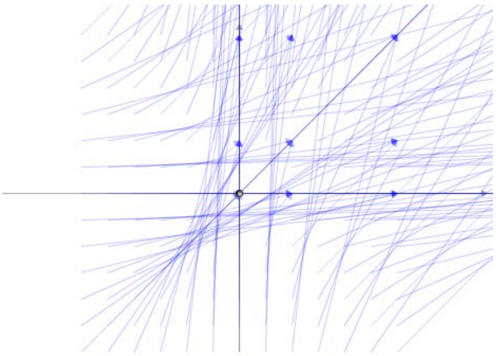
$$\int_{y=0}^{y=2}\int_{x=\frac{1}{2}y}^{x=1} e^{x^2}\,dxdy = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=2x} e^{x^2}\,dydx = \int_{x=0}^{x=1}\left[e^{x^2}y\right]_{y=0}^{y=2x} dx = \int_{x=0}^{x=1} 2xe^{x^2}\,dx = \left[e^{x^2}\right]_{x=0}^{x=1} = e^1 - e^0 = \underline{\underline{e-1}}$$

I det opprinnelige integralet integreres først mhp $x$, dvs $y$ holdes fast.
Ved ombytting av integrasjonsrekkefølgen integreres først mhp $y$, dvs $x$ holdes fast.
For valgt $x$ vil $y$ da ha nedre grense $y = 0$ og øvre grense $y = 2x$.
Deretter integreres mht $x$ som vil ha nedre grense $x = 0$ og øvre grense $x = 1$.

2. a) Følgende vektorfelt er gitt:

$$\vec{F} = \left[x^2, y^2, z^2\right]$$

Figuren nedenfor viser projeksjonen av vektorfeltet ned i *xy*-planet.



Divergens til et vektorfelt representert ved *F*-vektor
er grensen av nettofluks ut pr infinitesimale volumenhet når volumet går mot null
og er lik skalarproduktet mellom del-operator og *F*-vektor.

$$div\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[F_1, F_2, F_3\right]$$

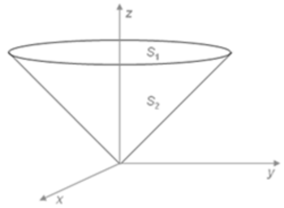
$$= \frac{\partial}{\partial x}(F_1) + \frac{\partial}{\partial y}(F_2) + \frac{\partial}{\partial z}(F_3) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z^2\right) = 2x + 2y + 2z = \underline{\underline{2(x+y+z)}}$$

Curl til et vektorfelt representert ved *F*-vektor er grensen av sirkulasjon pr enhetsareal
når arealet går mot null og er lik kryssproduktet mellom del-operator og *F*-vektor.

$$curl\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \times \left[F_1, F_2, F_3\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(z^2\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(y^2\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(z^2\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\right)\right] = \left[0-0, 0-0, 0-0\right] = \left[0,0,0\right] = \underline{\underline{\vec{0}}}$$

b) Nettofluks ut av den lukkede flaten *S*:
Nettofluks av et vektorfelt representert ved *F*-vektor ut av en flate *S*
er skalarproduket av *F*-vektor og enhetsnomalvektor *n*-vektor til flaten integrert over flaten *S*.
Når flaten *S* er lukket, vil nettofluks av vektorfeltet ut av flaten *S* være skalarproduket av
*F*-vektor og enhetsnomalvektor *n*-vektor til flaten integrert over den lukkede flaten *S*.
Når flaten *S* er lukket og *F*-vektor har kontinuerlige partiell-deriverte på og innenfor *S*,
sier Gauss' teorem av nettofluksen er divergensen til *F*-vektor integrert over
det legemet *V* som er omsluttet av flaten *S*.




$$\Phi_s = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV$$
$$= 2\iiint_V (x+y+z) dV$$
$$= 2\left[\iiint_V x dV + \iiint_V y dV + \iiint_V z dV\right]$$
$$= 2\iiint_V z dV \qquad x \text{ og } y - \text{leddene faller ut av symmetrigrunner}$$
$$= 2\int_{r=0}^{r=1}\int_{z=r}^{z=1}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} zr d\theta dz dr$$
$$= 2\int_{r=0}^{r=1}\int_{z=r}^{z=1}\left[rz\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dz dr$$
$$= 2\pi\int_{r=0}^{r=1}\int_{z=r}^{z=1} 2rz dz dr = 2\pi\int_{r=0}^{r=1}\left[rz^2\right]_{z=r}^{z=1} dr = 2\pi\int_{r=0}^{r=1} r(1-r^2) dr = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

Eller:
Benytter Gauss' divergensteorem, samt at integralet av sinθ og cosθ med θ fra 0 til 2π er lik null.

$$\Phi_s = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV$$
$$= 2\iiint_V (x+y+z) dV$$
$$= 2\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=1}\int_{z=r}^{z=1}\left(r\cos\theta + r\sin\theta + z\right) r dz dr d\theta$$
$$= 2\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=1}\int_{z=r}^{z=1}\left(r^2\cos\theta + r^2\sin\theta + rz\right) dz dr d\theta$$
$$= 2\int_{r=0}^{r=1}\int_{z=r}^{z=1}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left(r^2\cos\theta + r^2\sin\theta + rz\right) d\theta dz dr$$
$$= 2\int_{r=0}^{r=1}\int_{z=r}^{z=1}\left[rz\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dz dr$$
$$= 2\pi\int_{r=0}^{r=1}\int_{z=r}^{z=1} 2rz dz dr = 2\pi\int_{r=0}^{r=1}\left[rz^2\right]_{z=r}^{z=1} dr = 2\pi\int_{r=0}^{r=1} r(1-r^2) dr = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

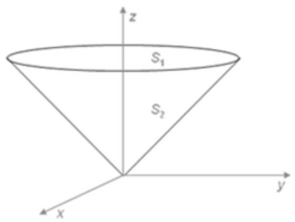
c) Beregning av fluksen ut av sideflaten $S_2$ i kjeglen kan beregnes direkte.
Fluksen ut av den lukkede $S$ flaten er lik summen av fluksen ut av toppflaten $S_1$ og fluksen ut av sideflaten $S_2$. Vi bestemmer derfor først fluksen ut av toppflatern $S_1$

Ved nettofluks ut av toppflaten $S_1$, vil enhetsnormalvektor n-vektor være lik [0,0,1]. Derfor vil fluksen ut av toppflaten være gitt ved (merk at vi ikke kan benytte Gauss' lov her siden toppflaten ikke er en lukket flate):

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{S_1} \left[x^2, y^2, z^2\right]\cdot[0,0,1]\,dS = \iint_{S_1} z^2 dS = \iint_{S_1} 1\cdot dS = \iint_{S_1} dS = \pi\cdot 1^2 = \underline{\pi}$$

Nettofluks ut av sideflaten $S_2$:
Benytter at fluksen ut av den lukkede flaten $S$ er lik summen av fluksen ut av toppflaten $S_1$ og fluksen ut av sideflaten $S_2$.

$$\Phi_S = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} \Rightarrow \Phi_{S_2} = \Phi_S - \Phi_{S_1} = \frac{\pi}{2} - \pi = \underline{\underline{-\frac{\pi}{2}}}$$




d) Siden curl til $F$-vektor er lik nullvektor, dvs $F$-vektor representerer et konservativt vektorfelt, så vil kurve-integralet av $F$-vektor langs enhver lukket kurve være lik null, dvs:

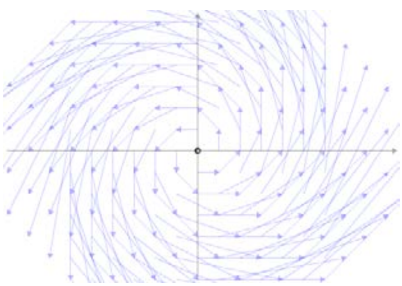
$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \underline{\underline{0}}$$

Vi bestemmer curl til $G$-vektor for å undersøke hvorvidt $G$-vektor representerer et konservativt vektorfelt, eventuelt til senere beregninger vha Stokes' teorem.

$$curl\vec{G} = \nabla\times\vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 2 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(2) - \frac{\partial}{\partial z}(x), \frac{\partial}{\partial z}(-y) - \frac{\partial}{\partial x}(2), \frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right] = \underline{[0,0,2]}$$

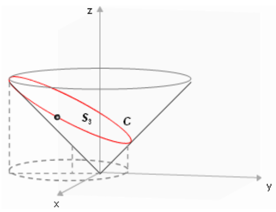
Siden curl til $G$-vektor er ulik null-vektor, bestemmer vi en parameterisering av kurven $C$ til direkteberegning av sirkulasjonen av $G$-vektor.
Vi bestemmer først projeksjonen av kurven $C$ (og dermed også projeksjonen av flaten $S_3$) ned i $xy$-planet. Dette vil være til hjelp ved parameterisering av kurven $C$, samt eventuelt til arealbestemmelse av den nevnte projeksjonen.

Figuren nedenfor viser projeksjonen av vektorfeltet $G$ ned i $xy$-planet.



$$z=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \wedge \qquad y+2z=1$$
$$\Downarrow$$
$$z^2=x^2+y^2$$
$$\left(\frac{1-y}{2}\right)^2=x^2+y^2$$
$$(1-y)^2=4x^2+4y^2$$
$$1-2y+y^2=4x^2+4y^2$$
$$4x^2+3y^2+2y=1$$
$$4x^2+3\left(y^2+\frac{2}{3}y\right)=1$$
$$4x^2+3\left(y^2+\frac{2}{3}y+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)=1+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$4x^2+3\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{3}$$
$$3x^2+\frac{9}{4}\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=1$$
$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{\left(y+\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=1$$

Projeksjonen av kurven *C* ned i *xy*-planet er altså en ellipse med sentrum i (0,-1/3) og halvakser 1/3^0.5 og 2/3.




Parameterisering av kurven *C*:

$$\vec{r}(t)=\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t,\frac{2}{3}\sin t-\frac{1}{3},\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sin t-\frac{1}{3}\right)\right]=\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t,\frac{2}{3}\sin t-\frac{1}{3},\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\sin t\right]$$
$$d\vec{r}=\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t,\frac{2}{3}\cos t,-\frac{1}{3}\cos t\right]dt$$

*z*-komponenten i parameteriseringen er gitt ved $z=1/2-y/2$

*G*-vektor uttrykt ved den gitte parameteriseringen:

$$\vec{G}(x,y,z)=[-y,x,2]$$
$$\vec{G}(\vec{r}(t))=\left[-\frac{2}{3}\sin t+\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t,2\right]$$

Sirkulasjonen av *G*-vektor langs den lukkede kurven *C*:

$$\vec{G}\cdot d\vec{r}=\left[-\frac{2}{3}\sin t+\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t,2\right]\cdot\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t,\frac{2}{3}\cos t,-\frac{1}{3}\cos t\right]dt$$
$$=\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\sin^2 t-\frac{1}{3\sqrt{3}}\sin t+\frac{2}{3\sqrt{3}}\cos^2 t-\frac{2}{3}\cos t\right)dt=\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\sin t-\frac{2}{3}\cos t\right)dt$$
$$\oint_C \vec{G}\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\sin t-\frac{2}{3}\cos t\right)dt=\frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot 2\pi=\frac{4}{3\sqrt{3}}\pi=\underline{\underline{\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi}}$$

e) Sirkulasjonen av *F*-vektor langs den lukked kurven C er tidligere beregnet til 0 (siden *F*-vektor representerer et konservativt vektorfelt) i oppgave d.
Dette resultatet kan vi også se av Stokes' teorem siden curl til *F*-vektor er lik null-vektor:

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}ds = \iint_{S_3}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}dS$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{ds}ds = \iint_{S_3}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}dS$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{S_3}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}dS = \iint_{S_3}\vec{0}\cdot\vec{n}dS = \underline{\underline{0}}$$

Til bestemmelse av sirkulasjonen av *G*-vektor langs den lukkede kurven *C*, trenger vi en skalarfunksjon *f* hvor $S_3$ er en nivåflate til *f*, en enhetsnormalvektor og et uttrykk for projeksjonen av det infinitesimale flate-elementet *dS* ned i *xy*-planet.

Vi innfører følgende skalarfunksjon *f*:

$$f(x,y,z) = y + 2z$$

Flaten $S_3$ er da gitt ved nivåflaten $f(x,y,z) = 1$.
Gradienten til *f* vil da være en normalvektor til flaten $S_3$.

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right] = [0,1,2]$$

$$|\nabla f| = \sqrt{0^2+1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

$$\nabla f\cdot\vec{p} = [0,1,2]\cdot[0,0,1] = 2$$

$$|\nabla f\cdot\vec{p}| = 2$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{1}{\sqrt{5}}[0,1,2]$$

$$dS = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot\vec{p}|}dA = \frac{\sqrt{5}}{2}dA$$

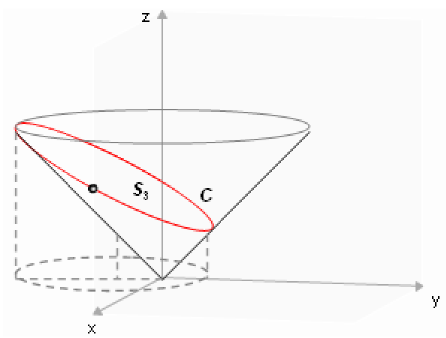
Sirkulasjonen til *G*-vektor langs den lukkede kurven *C* vha Stokes' teorem:

$$\oint_C \vec{G}\cdot\vec{T}ds = \iint_{S_3}(\nabla\times\vec{G})\cdot\vec{n}dS$$

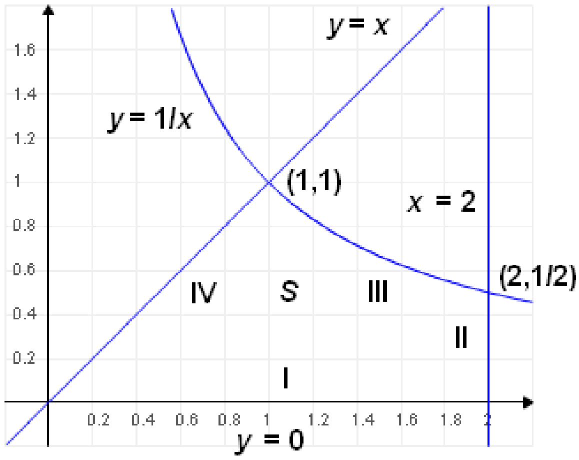
$$\oint_C \vec{G}\cdot\frac{d\vec{r}}{ds}ds = \iint_{S_3}(\nabla\times\vec{G})\cdot\vec{n}dS$$

$$\oint_C \vec{G}\cdot d\vec{r} = \iint_{S_3}(\nabla\times\vec{G})\cdot\vec{n}dS = \iint_R[0,0,2]\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}[0,1,2]\frac{\sqrt{5}}{2}dA = 2\iint_R dA = 2\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi}}$$

I beregning av det siste integralet er benyttet at arealet av en ellipse med halvakser *a* og *b* er gitt ved $\pi ab$.



3. Området $S$ og den lukkede kurven $C$ delt opp i fire del-kurver I, II, III og IV:




a)

Parameterisering av de enkelte delkurvene:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I$ : | $\vec{r}(t) = [t,0]$ | $x = t$ | $y = 0$ | $dx = dt$ | $dy = 0$ | $t \in [0,2]$ |
| $II$ : | $\vec{r}(t) = [2,t]$ | $x = 2$ | $y = t$ | $dx = 0$ | $dy = dt$ | $t \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ |
| $III$ : | $\vec{r}(t) = \left[2-t,\frac{1}{2-t}\right]$ | $x = 2-t$ | $y = \frac{1}{2-t}$ | $dx = -dt$ | $dy = \frac{1}{(2-t)^2}dt$ | $t \in [0,1]$ |
| $IV$ : | $\vec{r}(t) = [1-t,1-t]$ | $x = 1-t$ | $y = 1-t$ | $dx = -dt$ | $dy = -dt$ | $t \in [0,1]$ |

b) Arealet av flaten $S$:

$$\begin{aligned}
A = -\oint_C y\,dx &= -\int_I y\,dx - \int_{II} y\,dx - \int_{III} y\,dx - \int_{IV} y\,dx \\
&= -0 - 0 - \int_{III} y\,dx - \int_{IV} y\,dx \\
&= -\int_{III} y\,dx - \int_{IV} y\,dx \\
&= -\int_0^1 \frac{1}{2-t}(-dt) - \int_0^1 (1-t)(-dt) \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2-t}dt + \int_0^1 (1-t)dt \\
&= \left[-\ln|2-t|\right]_0^1 + \left[t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \left[-\ln(2-t)\right]_0^1 + \left[t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = -\ln 1 + \ln 2 + 1 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \ln 2}}
\end{aligned}$$

Kontroll:
Beregner arealet av trekanten under linjen $y = x$ fra $x = 0$ til $x = 1$
og arealet under $y = 1/x$ fra $x = 1$ til $x = 2$:

$$A = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 + \int_{x=1}^{x=2} \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2} + \left[\ln|x|\right]_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 2 - \ln 1 = \underline{\frac{1}{2} + \ln 2}$$

b) (forts.)

Eller kan også benytte Greens areal-teorem uten å benytte parameteriseringen i a):

$$\begin{aligned}
A = -\oint_C y\,dx &= -\int_I y\,dx - \int_{II} y\,dx - \int_{III} y\,dx - \int_{IV} y\,dx \\
&= -0 - 0 - \int_{III} y\,dx - \int_{IV} y\,dx \\
&= -\int_{III} y\,dx - \int_{IV} y\,dx \\
&= -\int_2^1 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^0 x\,dx \\
&= -\left[\ln|x|\right]_2^1 - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=1}^{x=0} \\
&= -\ln 1 + \ln 2 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \ln 2}}
\end{aligned}$$

4. a) Generell løsning av den gitte differentialligningen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2xy^2 + \cos(x) \\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2xy^2 + \cos(x) \\
&\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx = \int (2xy^2 + \cos(x))\,dx \\
&\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y^2 + \sin(x) + F(y) \\
&\int \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = \int (x^2 y^2 + \sin(x) + F(y))\,dy \\
&z = z(x,y) = \frac{1}{3}x^2 y^3 + y\sin(x) + \int F(y)\,dy + G(x) \\
&z = z(x,y) = \underline{\underline{\frac{1}{3}x^2 y^3 + y\sin(x) + H(y) + G(x)}}
\end{aligned}$$

b) Partikulær løsning som oppfyller de gitte tilleggsbetingelsene:

$$z = z(x,y) = \frac{1}{3}x^2 y^3 + y\sin(x) + H(y) + G(x)$$

$$z(x,0) = x^3 \Rightarrow \frac{1}{3}x^2 \cdot 0^3 + 0 \cdot \sin(x) + H(0) + G(x) = x^3 \Rightarrow G(x) = \underline{x^3 - H(0)}$$

$$z = z(x,y) = \frac{1}{3}x^2 y^3 + y\sin(x) + H(y) + x^3 - H(0)$$

$$z(\pi,y) = \sin(y) \Rightarrow \frac{1}{3}\pi^2 y^3 + y\sin(\pi) + H(y) + \pi^3 - H(0) = \sin(y) \Rightarrow H(y) = \underline{\sin(y) - \frac{1}{3}\pi^2 y^3 - \pi^3 + H(0)}$$

$$\begin{aligned}
z = z(x,y) &= \frac{1}{3}x^2 y^3 + y\sin(x) + \sin(y) - \frac{1}{3}\pi^2 y^3 - \pi^3 + H(0) + x^3 - H(0) \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{3}x^2 y^3 + y\sin(x) + \sin(y) - \frac{1}{3}\pi^2 y^3 - \pi^3 + x^3}}
\end{aligned}$$

5. a)

$$\nabla\cdot\left(f\vec{F}\right)=\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]\left(f\vec{F}\right)$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]\left(f\left[F_1,F_2,F_3\right]\right)$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]\left[fF_1,\ fF_2,\ fF_3\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(fF_1\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(fF_2\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(fF_3\right)$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)F_1+f\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)F_2+f\left(\frac{\partial F_2}{\partial Y}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)F_3+f\left(\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)F_1+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)F_2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)F_3+f\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)+f\left(\frac{\partial F_2}{\partial Y}\right)+f\left(\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)$$

$$=\left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right]\cdot\left[F_1,F_2,F_3\right]+f\left(\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]\cdot\left[F_1,F_2,F_3\right]\right)$$

$$=\underline{\underline{\left(\nabla f\right)\cdot\vec{F}+f\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)}}$$

b)

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right),\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\right]$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right),\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right),\frac{\partial}{\partial z}\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$=\left[-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}},-y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}},-z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$=\left[-xr^{-3},-yr^{-3},-zr^{-3}\right]$$

$$=-\frac{1}{r^3}\left[x,y,z\right]$$

$$=\underline{\underline{-\frac{1}{r^3}\vec{r}}}$$