UNIVERSITETET I AGDER
Grimstad

E K S A M E N S O P P G A V E :

FAG: MA-209 Matematikk 3 LÆRER: Per Henrik Hogstad

Klasse(r):	**Dato: 16.05.14**	**Eksamenstid, fra-til: 09.00 – 14.00**	
Eksamensoppgaven består av følgende	**Antall sider: 5** **(inkl. forside + vedlegg)**	**Antall oppgaver: 5**	**Antall vedlegg: 1**
Tillatte hjelpemidler er:	**Kalkulator** **Hogstad: Formler MA-209** **Haugan: Formler og tabeller** **Gyldendal: Formelsamling i matematikk** **Rottmann: Matematisk formelsamling** **(Ikke tillatt å skrive i formelsamlingene)**		
KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG			

Oppg nr		Poeng
1	a	3
	b	3
2	a	3
	b	3
3	a	3
	b	3
	c	3
4	a	3
	b	3
5		3
Sum		30

Poengene viser vekt-fordelingen for de enkelte del-spørsmålene.
Ved karaktersetting vektlegges selvfølgelig i tillegg en total-vurdering, bl.a. en vurdering av i hvilken grad kandidaten har kunnskaper innenfor de ulike områdene gitt i oppgave-settet.

Besvarelsen skal inneholde mellomregninger.
Kalkulator skal ikke benyttes i beregningene, kun til eventuell kontroll av egne svar.

LYKKE TIL !

1. En kurve i rommet er gitt ved:

   $\vec{r}(t) = [3\cos t, 3\sin t + 1, 2t] \qquad t \in [0, 2\pi]$

   a) Vis at kurven ligger på en sylinderflate med akse gjennom punktet (0,1,0) parallell med z-aksen og med radius lik 3.

   b) Bestem lengden av kurven.

2. Figur 2.1 viser en del av en kurve i planet gitt ved:

   $\vec{r}(t) = [t^3 - 4t, t^2] \qquad t \in [-\pi, \pi]$

   a) Vis at kurven er symmetrisk om andre-aksen (*y*-aksen).

   b) Bestem vha Greens areal-teorem arealet av det lukkede området som kurven avgrenser.

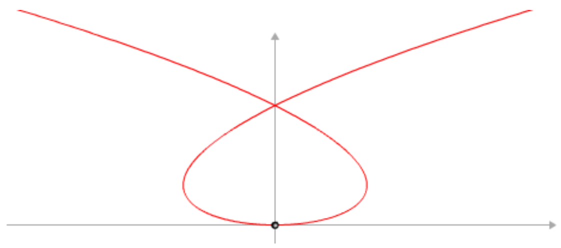


Fig 2.1

3. Et romlegeme *D* er avgrenset av den parabolske sylinderen $z = 4 - 3y^2$ og den elliptiske paraboloiden $z = 4x^2 + y^2$ (se figur 3.1).

   a) Vis at skjæringskurvens projeksjon ned i *xy*-planet mellom disse to gitte flatene er en sirkel med sentrum i origo og radius lik 1.

   b) Bestem volumet av romlegemet *D*.

   c) Vi har gitt følgende vektorfelt:

   $\vec{F}(x, y, z) = [-y, x + 2y, 0]$

   Bestem netto fluks av det gitte vektorfeltet ut av legement *D*.

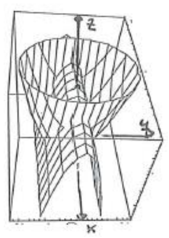


Fig 3.1

4. Figur 4.1 viser planet S gitt ved: $z = 8 - 4x - 2y$.
Planet skjærer koordinataksene i punktene A, B og C.

Vi lar K være den lukkede kurven som går langs det rette linjestykket fra A til B, etterfulgt av det rette linjestykket fra B til C og til slutt etterfulgt av det rette linjestykket fra C til A.

Vi har gitt følgende vektorfelt:

$$\vec{F} = \left[z, -z, x^2 - y^2\right]$$

Med kurveintegralet av det gitte vektorfeltet langs den lukkede kurven K mener vi:

$$\oint_K \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

a) Bestem kurveintegralet av det gitte vektorfeltet langs den lukkede kurven K ved direkte beregning, dvs uten bruk av Stokes teorem.

b) Bestem kurveintegralet av det gitte vektorfeltet langs den lukkede kurven K ved hjelp av Stokes teorem.

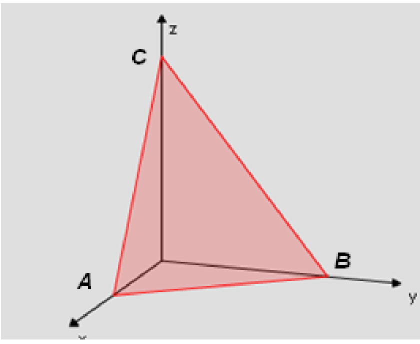


Fig 4.1

5. En vannhastighet er representert ved følgende vektorfelt.

$$\vec{v} = \left[0, 1 - x^2, 0\right] \qquad |x| \le 1 \qquad |z| \le 1$$

Vi plasserer et skovlhjul (paddle wheel, se fig 5.1) i punktet P(1/2, 0, 0).

Beregn i hvilken retning aksen til dette skovlhjulet må plasseres
for at vi skal få maksimal sirkulasjon (rotasjon) på dette skovlhjulet,
og beregn i hvilken retning skovlhjulet roterer.
Du kan gjerne først argumentere uten matematikk for denne akseplasseringen,
før du deretter verifiserer (kontrollerer) din konklusjon matematisk.

Fig 5.1

Løsning:

1.

$\vec{r}(t) = [3\cos t, 3\sin t + 1, 2t] \qquad t \in [0, 2\pi]$

a)

$x = 3\cos t$

$y = 3\sin t + 1$

$\Downarrow$

$x^2 + (y-1)^2 = (3\cos t)^2 + (3\sin t + 1 - 1)^2$

$= (3\cos t)^2 + (3\sin t)^2 = 9\cos^2 t + 9\sin^2 t = 9(\cos^2 t + \sin^2 t) = 9 \cdot 1 = 9 = \underline{3^2}$

Det geometriske sted for alle de punkter som oppfyller:

$x^2 + (y-1)^2 = 3$

er en sylinder med en akse parallell med z-aksen gjennom punktet (0,1,0) og med radius 3.

Herav ser vi at kurven ligger på en sylinder med en akse parallell med *z*-aksen gjennom punktet (0,1,0) og med radius 3.

b)

$\vec{r}(t) = [3\cos t, 3\sin t + 1, 2t]$

$\Downarrow$

$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = [-3\sin t, 3\cos t, 2]$

$|\vec{v}(t)| = |[-3\sin t, 3\cos t, 2]| = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + 2^2} = \sqrt{9(\sin^2 t + \cos^2 t) + 4} = \underline{\sqrt{13}}$

$L = \int_C ds = \int_0^{2\pi} |\vec{v}(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{13} dt = \sqrt{13} \int_0^{2\pi} dt = \sqrt{13} \cdot [t]_0^{2\pi} = \sqrt{13} \cdot 2\pi = \underline{\underline{2\pi\sqrt{13}}}$

2.

a)

$$\vec{r}(t) = \left[t^3 - 4t, t^2\right] \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

Kurven er symmetrisk om andre-aksen (y-aksen)
hvis x-komponenten til r-vektor beholder absoluttverdien og skifter tegn
mens y-komponenten er uendret når parameteren t byttes ut med $-t$.

$$x(t) = t^3 - 4t \quad \Rightarrow \quad x(-t) = (-t)^3 - 4(-t) = -t^3 + 4t = -(t^3 - 4t) = -x(t)$$
$$y(t) = t^2 \quad \Rightarrow \quad y(-t) = (-t)^2 = t^2 = y(t)$$

Herav ser vi at kurven er symmetrisk om andre-aksen (y-aksen).

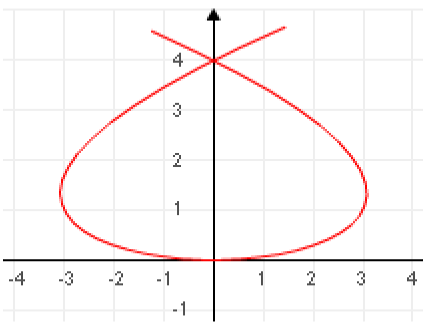
b) Kurvens skjæringspunkter med andre-aksen (y-aksen):

$$x(t) = t^3 - 4t = 0 \;\Leftrightarrow\; t(t-2)(t+2) = 0 \;\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 2 \vee t = -2$$
$$y(0) = 0^2 = 0 \qquad y(2) = 2^2 = 4 \qquad y(-2) = (-2)^2 = 4$$

Kurvens skjæringspunkter med andre-aksen (y-aksen) er (0,0) og (0,4)

$$\vec{r}(t) = \left[t^3 - 4t, t^2\right] \qquad t \in [-\pi, \pi]$$
$$\vec{r}(-\pi) = \left[(-\pi)^3 - 4\cdot(-\pi), (-\pi)^2\right] = \left[-\pi^3 + 4\pi, \pi^2\right] = \underline{\left[\pi(4-\pi^3), \pi^2\right]}$$
$$\vec{r}(-2) = \underline{[0,4]}$$
$$\vec{r}(0) = \underline{[0,0]}$$
$$\vec{r}(2) = \underline{[0,4]}$$
$$\vec{r}(\pi) = \left[\pi^3 - 4\pi, \pi^2\right] = \underline{\left[\pi(\pi^2 - 4), \pi^2\right]}$$

Når t løper fra -π til π ser vi at kurven løper fra punktet $(\pi(4-\pi^2,\pi^2)$ i andre kvadrant gjennom punktet (0,4), ut i første kvadrant, gjennom punktet (0,0), ut i andre kvadrant, gjennom punktet (0,4), ut i første kvadrant og ender til slutt opp i punktet $(\pi(\pi^2,\pi^2)$ i første kvadrant.



Vi benytter Greens areal-teorem, samt symmetriegeneskapen fra a).
Merk at Greens areal-teorem krever at vi gjennomløper en lukket kurve i positiv retning (mot klokka). Vi kaller denne lukkede kurven for K.
Vi får derfor beregnet halvdelen av etterspurt areal ved å gjennomløpe kurven fra origo (0,0), gjennom første kvadrant frem til punktet (0,4)
(denne delen av den lukkede kurven kaller vi K_1)
for deretter å følge andre-aksen (y-aksen) fra (0,4)
(denne delen av den lukkede kurven kaller vi K_2):
tilbake til origo (0,0).
I den første del (fra 0,0) gjennom første kvadrant frem til (0,4)) av denne lukkede kurven.
svarer dette til at parameteren t løper fra 0 til -2.

Areal av avgrenset område *R* kan vha Greens areal-teorem skrives:

$$A = \iint_R dA = \oint_K x\,dy$$

Etterspurt areal vil nå være gitt ved:

$$A = 2\oint_K x\,dy = 2\left[\int_{K1} x\,dy + \int_{K2} x\,dy\right] = 2\left[\int_{K1} x\,dy + \int_{K2} 0\,dy\right] = 2\int_{K1} x\,dy$$

$$= 2\int_{y=0}^{y=4} x\,dy = 2\int_{t=0}^{t=-2} (t^3 - 4t)2t\,dt = 4\int_{t=0}^{t=-2} (t^4 - 4t^2)\,dt = 4\left[\frac{1}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3\right]_{t=0}^{t=-2} = \underline{\underline{\frac{256}{15}}}$$

3. a) Skæringskurven mellom de to gitte flatene:

$$z = 4 - 3y^2$$
$$z = 4x^2 + y^2$$
$$\Downarrow$$
$$4x^2 + y^2 = 4 - 3y^2$$
$$4x^2 + 4y^2 = 4$$
$$\underline{x^2 + y^2 = 1}$$

Herav følger at skjæringskurvens projeksjon ned i *xy*-planet mellom de to gitte flatene er en sirkel med sentrum i origo og radius lik 1.

b) Volumet av romlegemet *D*:

$$V = \iiint_D dV = \iint_R \int_{z=4x^2+y^2}^{z=4-3y^2} dz\,dA = \iint_R [z]_{z=4x^2+y^2}^{z=4-3y^2} dA = \iint_R \left((4-3y^2)-(4x^2+y^2)\right)dA$$
$$= \iint_R \left(4 - 4(x^2+y^2)\right)dA = 4\iint_R \left(1-(x^2+y^2)\right)dA = 4\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=1}(1-r^2)r\,dr\,d\theta$$
$$= 4\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=1}(r-r^3)dr\theta = 4\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=1} d\theta = 4\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\frac{1}{4}d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta = [\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \underline{\underline{2\pi}}$$

c) Vi benytter Gauss' lov til å bestemme netto fluks ut av romleget D:

$$\vec{F}(x,y,z) = [-y, x+2y, 0]$$

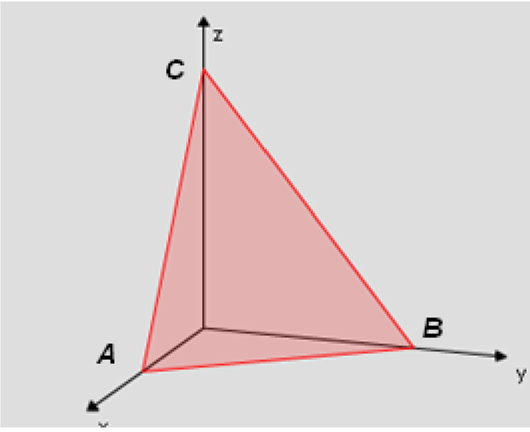
$$\nabla \cdot \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot [-y, x+2y, 0] = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x+2y) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = \underline{2}$$

$$\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\,dS = \iiint_D \nabla \cdot \vec{F}dV = \iiint_D 2dV = 2\iiint_D dV = 2V = 2 \cdot 2\pi = \underline{\underline{4\pi}}$$

4. Vektorfelt:

$$\vec{F} = [z, -z, x^2 - y^2]$$

Planet $z = 8 - 4x - 4y$:



a) Direkte beregning av kurveintegral:

Koordinater til A, B og C:

$$\begin{aligned}
&z = 8 - 4x - 2y \quad z = 0 \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad A = (2,0,0)\\
&z = 8 - 4x - 2y \quad z = 0 \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad B = (0,4,0)\\
&z = 8 - 4x - 2y \quad x = 0 \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad C = (0,0,8)
\end{aligned}$$

Retningsvektorer:

$$\begin{aligned}
&AB : \vec{v} = [0 - 2, 4 - 0, 0 - 0] = [-2,4,0]\\
&BC : \vec{v} = [0 - 0, 0 - 4, 8 - 0] = [0,-4,8]\\
&CA : \vec{v} = [2 - 0, 0 - 0, 0 - 8] = [2,0,-8]
\end{aligned}$$

Parameterisering:

$$\begin{aligned}
&AB : \vec{r}(t) = [2,0,0] + t[-2,4,0] = [2 - 2t, 4t, 0] \qquad t \in [0,1]\\
&BC : \vec{r}(t) = [0,4,0] + t[0,-4,8] \ = [0, 4 - 4t, 8t] \qquad t \in [0,1]\\
&CA : \vec{r}(t) = [0,0,8] + t[2,0,-8] \ = [2t, 0, 8 - 8t] \qquad t \in [0,1]
\end{aligned}$$

F-vektor og dr-vektor:

$$\vec{F} = [z, -z, x^2 - y^2]$$

$$\begin{aligned}
&AB : \vec{F}(t) = [0, -0, (2 - 2t)^2 - (4t)^2] \quad d\vec{r}(t) = [-2,4,0]dt \quad \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0\\
&BC : \vec{F}(t) = [8t, -8t, -(4 - 4t)^2] \quad d\vec{r}(t) = [0,-4,8]dt \quad \vec{F} \cdot d\vec{r} = (32t - 8(4 - 4t)^2)dt = 32(-4 + 9t - 4t^2)dt\\
&CA : \vec{F}(t) = [8 - 8t, 8t - 8, (2t)^2] \quad d\vec{r}(t) = [2,0,-8]dt \quad \vec{F} \cdot d\vec{r} = (16 - 16t - 8 \cdot (2t)^2)dt = (16 - 16t - 32t^2)dt
\end{aligned}$$

Kurveintegral ved direkte beregning:

$$\oint_K \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{AB}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{bc}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{ca}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{t=0}^{t=1} 0dt + 32\int_{t=0}^{t=1}(-4+9t-4t^2)dt + \int_{t=0}^{t=1}(16-16t-32t^2)dt$$

$$= 32\left[-4t+\frac{9}{2}t^2-\frac{4}{3}t^3\right]_{t=0}^{t=1} + \left[16t-8t^2-\frac{32}{3}t^3\right]_{t=0}^{t=1}$$

$$= 32(-4+\frac{9}{2}-\frac{4}{3})+16-8-\frac{32}{3}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{88}{3}}}$$

b) Kurveintegral vha Stokes teorem:

$$\oint_K \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_K \vec{F}\cdot\vec{T}ds = \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}dS = \iint_R (\nabla\times\vec{F})\cdot\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot p|}dA$$

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & -z & x^2-y^2 \end{vmatrix} = \underline{[1-2y, 1-2x, 0]}$$

$$z = 8-4x-2y$$
$$4x+2y+z = 8$$
$$f(x,y,z) = 4x+2y+z$$

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right] = \underline{[4,2,1]}$$
$$|\nabla f| = |[4,2,1]| = \sqrt{4^2+2^2+1^2} = \underline{\sqrt{21}}$$
$$\nabla f\cdot\vec{p} = \nabla f\cdot\vec{k} = [4,2,1]\cdot[0,0,1] = \underline{1}$$
$$|\nabla f\cdot\vec{p}| = |1| = \underline{1}$$

$$\oint_K \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_K \vec{F}\cdot\vec{T}ds = \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}dS$$

$$= \iint_R (\nabla\times\vec{F})\cdot\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot p|}dA$$

$$= \iint_R [1-2y, 1-2x, 0]\cdot\frac{[4,2,1]}{\sqrt{21}}\frac{\sqrt{21}}{1}dA$$

$$= \iint_R (6-4x-8y)dA$$

$$= \int_0^2\int_0^{4-2x}(6-4x-8y)dydx$$

$$= \underline{\underline{-\frac{88}{3}}}$$

5.

$\vec{v} = \left[0, 1 - x^2, 0\right] \qquad |x| \le 1 \qquad |z| \le 1$

Stokes teorem:

$$\oint_C \vec{v} \cdot \vec{T} ds = \iint_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n} dS$$

Vi lar her *C* være en sirkulær kurve med skovle-aksen normal på sirkelplanet gjennom sirkelens sentrum.
Flaten *S* er en flate som har *C* som rand. I vår oppgave lar vi S være den plane sirkelskiven avgrenset av sirkelen *C*.
n-vektor vil nå være en konstant enhetsnormalvektor på flaten *S*.

Vi får pr def maksimal sirkulasjon av vektorfeltet gitt ved hastighetsvektoren *v*-vektor (og dermed i vårt tilfelle maksimal rotasjons-hastighet på skovlen) når vi har maksimal verdi av enkelt-integralet til venstre eller vha Stokes teorem maksimal verdi av dobbelt-integralet tl høyre.

La oss se litt nærmere på integranden i dobbelt-integralet til høyre:

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 1 - x^2 & 0 \end{vmatrix} = \left[0, 0, -2x\right]$$

Vi ser at curl til *v*-vektor har retning parallell med *z*-aksen.
Derfor får vi maksimal integrand og dermed maksimal sirkulasjon ved å la n-vektor være parallell med *z*-aksen.

For x = 0 vil curl til v-vektor være lik null-vektor, dvs vi får ingen sirkulasjon.
Vannet vil nå strømme like mye med skovlen i andre-kvadrant som mot i første kvadrant.
For x = ½ som er oppgitt i oppgaven vil curl til v-vektor være lik [0,0,-1].
Dette betyr at *n*-vektor vil ha retning i negativ *z*-retning, hvilket igjen svarer til at sirkulasjonen er i retning med klokka sett ovenfra nedover langs *z*-aksen.
Dette henger sammen med at vannet (sett ovenfra nedover langs *z*-aksen) strømmer mer med på venstre side enn mot på høyre side.

Konklusjon:

Vi får maksimal sirkulasjon når *n*-vektor peker samme vei som curl til *v*-vektor.
Den maksimale sirkulasjon foregår i et plan normalt på denne *n*-vektor.
Aksen på skovlhjulet må altså plasseres i retning parallell med *z*-aksen.

For x = ½ får vi:

$$\nabla \times \vec{v} = \left[0, 0, -2 \cdot \frac{1}{2}\right] = \left[0, 0, -1\right]$$

Curl til v-vektor peker altså i retning parallelt med den negative z-aksen.
Skovlhjulet vil derfor rotere med klokka sett ovenfra nedover parallelt med *z*-aksen.