UNIVERSITETET I AGDER
Grimstad

E K S A M E N S O P P G A V E :

FAG: MA-209 Matematikk 3 **LÆRER: Per Henrik Hogstad**

Klasse(r):	**Dato: 05.03.15**	**Eksamenstid, fra-til: 09.00 – 14.00**	
Eksamensoppgaven består av følgende	**Antall sider: 5 (inkl. forside + vedlegg)**	**Antall oppgaver: 4**	**Antall vedlegg: 1**
Tillatte hjelpemidler er:	**Kalkulator** **Hogstad: Formler MA-209** **Don't Panic** **Rottmann: Matematisk formelsamling** **(Ikke tillatt å skrive i formelsamlingene)**		
KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG			

MA-209 Utsatt Eksamen

Oppg nr		Poeng
1	a	3
	b	3
	c	3
2	a	3
	b	3
	c	3
	d	3
	e	3
3	a	3
	b	3
4		5
Sum		35

Poengene viser vekt-fordelingen for de enkelte del-spørsmålene.
Ved karaktersetting vektlegges selvfølgelig i tillegg en total-vurdering,
bl.a. en vurdering av i hvilken grad kandidaten har kunnskaper innenfor
de ulike områdene gitt i oppgave-settet.

Besvarelsen skal inneholde mellomregninger.
Kalkulator skal ikke benyttes i beregningene, kun til eventuell kontroll av egne svar.

LYKKE TIL !

1. Vi har gitt følgende kurveintegral:

$$\oint_C xydx + x^2 y^3 dy$$

hvor kurven C er den lukkede kurven som går langs sidene (kantene) i trekanten med hjørner (0,0), (1,0) og (1,2) i xy-planet med positiv omløpsretning, dvs i retning mot klokka sett ovenfra nedover langs z-aksen.

a) Beregn kurveintegralet direkte.

b) Beregn kurveintegralet ved hjelp av Greens teorem.

c) Beregn arealet av området omsluttet av kurven C ved hjelp av Greens arealteorem.

2. Vi har gitt et legeme T begrenset av følgende tre flater S_1. S_2 og S_3:

$$S_1: \quad z = 0$$
$$S_2: \quad x^2 + y^2 = 1 \qquad 0 \le z \le 1$$
$$S_3: \quad z = 4 - 3x^2 - 3y^2 \qquad 1 \le z \le 4$$

Videre har vi gitt følgende vektorfelt:

$$\vec{F} = [2x, 2y, 0]$$

a) Lag en skisse av legemet T.

b) Bestem volumet av legemet T.

c) Bestem divergens og curl av det gitte vektorfeltet.

d) Bestem fluksen av vektorfeltet ut av legemet T.

e) Bestem fluksen av vektorfeltet ut av hver av de tre flatene S_1. S_2 og S_3.

3. Vi har følgende polare kurve:

$$r = \sin(2\theta)$$

Vi lar R være det området i første kvadrant som er omsluttet av denne polare kurven.

a) Tegn den polare kurven i første kvadrant og bestem arealet av området R.

b) Bestem koordinatene til massesenteret av området R
når massetettheten av dette området er konstant.

4. En glatt kurve C i planet er gitt ved funksjonen $y = f(x)$.
En partikkel beveger seg langs denne kurven fra punktet $(a, f(a))$ til punktet $(b, f(b))$.
Partikkelen er påvirket av en radiell kraft F-vektor med konstant størrelse,
dvs kraften er representert ved vektoren F som hele tiden peker radielt bort fra origo
og som hele tiden har konstant lengde k.

Vis at kurveintegralet (dvs arbeidet som denne kraften utfører) ved partikkelens bevegelse
fra punktet $(a, f(a))$ til punktet $(b, f(b))$ er gitt ved:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = k\left[(b^2 + (f(b))^2)^{\frac{1}{2}} - (a^2 + (f(a))^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Vedlegg:

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1$$
$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$$
$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$$
$$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$$
$$\sin 2u = 2 \sin u \cos u$$
$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$
$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$
$$(\cos u)' = -\sin u$$
$$(\sin u)' = \cos u$$
$$(\cosh u)' = \sinh u$$
$$(\sinh u)' = \cosh u$$
$$e^{\ln x} = x$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

∇f normalvektor til en flate S som er en nivåflate til f

$\vec{n} = \dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$ enhetsnormalvektor til en flate S som er en nivåflate til f

Løsning:

1. a) Direkte beregning:

De tre sidene i trekanten kan parameteriseres på følgende måte:

$C_1 : \vec{r}_1(t) = [t, 0] \qquad t: 0 \to 1$
$C_2 : \vec{r}_2(t) = [1, t] \qquad t: 0 \to 2$
$C_3 : \vec{r}_3(t) = [t, 2t] \qquad t: 1 \to 0$

Herav får vi:

$$\oint_C xydx + x^2y^3dy = \int_{C_1} xydx + x^2y^3dy + \int_{C_2} xydx + x^2y^3dy + \int_{C_3} xydx + x^2y^3dy$$

$$= \int_{C_1} x\cdot 0 \cdot dx + x^2 \cdot 0^3 \cdot 0 + \int_{C_2} 1\cdot y \cdot 0 + 1^2 y^3dy + \int_{C_3} xydx + x^2y^3dy$$

$$= \int_{C_2} y^3dy + \int_{C_3} xydx + x^2y^3dy$$

$$= \int_{t=0}^{t=2} t^3dt + \int_{t=1}^{t=0} t\cdot 2tdt + t^2(2t)^3 2dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=2} t^3dt + \int_{t=1}^{t=0} 2t^2dt + 16t^5dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=2} t^3dt + 2\int_{t=1}^{t=0} (t^2 + 8t^5)dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}t^4\right]_{t=0}^{t=2} + 2\left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{4}{3}t^6\right]_{t=1}^{t=0} = 4 - 2\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right) = 4 - \frac{10}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

b) Bruk av Greens teorem:

Greens teorem:

Tangential-teoremet:

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}ds = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C F_1dx + F_2dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dxdy = \iint_R (curl\vec{F})\cdot\vec{k}dxdy = \iint_R (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{k}dxdy$$

Nomal-teoremet:

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}ds = \oint_C F_1dy - F_2dx = \iint_R \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right)dxdy = \iint_R div\vec{F}dxdy = \iint_R (\nabla\cdot\vec{F})dxdy$$

Vi benytter tangential-teoremet og setter:

$$\vec{F} = [F_1, F_2] = [xy, x^2y^3]$$

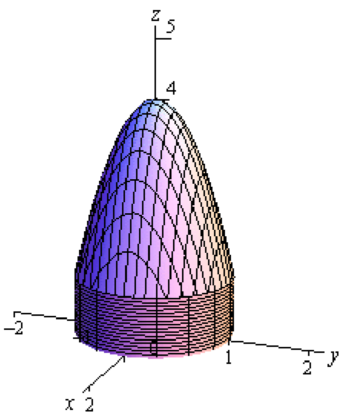
Herav får vi:

$$\begin{aligned}
\oint_C xydx + x^2y^3dy &= \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^3) - \frac{\partial}{\partial y}(xy)\right)dxdy \\
&= \iint_R (2xy^3 - x)dxdy \\
&= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=2x}(2xy^3 - x)dydx \\
&= \int_{x=0}^{x=1}\left[\frac{1}{2}xy^4 - xy\right]_{y=0}^{y=2x}dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1}(8x^5 - 2x^2)dx \\
&= \left[\frac{4}{3}x^6 - \frac{2}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}
\end{aligned}$$

c) Arealet vha Greens arealteorem:

$$\begin{aligned}
A = \iint_R dA = \oint_C xdy &= \int_{C_1} xdy + \int_{C_2} xdy + \int_{C_3} xdy \\
&= \int_{C_1} x\cdot 0 + \int_{C_2} 1\cdot dy + \int_{C_3} xdy \\
&= \int_{C_2} dy + \int_{C_3} xdy \\
&= \int_{t=0}^{t=2} dt + \int_{t=1}^{t=0} t\cdot 2dt \\
&= [t]_{c=0}^{t=2} + [t]_{t=1}^{t=0} = 2 - 1 = \underline{\underline{1}}
\end{aligned}$$

2. a) En skisse av legemet T:



b) Volumet av legemet T:

$$V=\iiint_T dV=\iint_R \int_{z=0}^{z=4-3x^2-3y^2} dz\ dA=\iint_R (4-3x^2-3y^2)dA$$

$$=\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=1}(4-3r^2)rdrd\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left[-\frac{1}{12}(4-3r^2)^2\right]_{r=0}^{r=1}d\theta$$

$$=\frac{5}{4}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta=\frac{5}{4}\cdot 2\pi=\underline{\underline{\frac{5}{2}\pi}}$$

c) Vektorfelt:

$$\vec{F}=[2x,2y,0]$$

Divergens av vektorfeltet:

$$div\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]\cdot[2x,2y,0]=\frac{\partial}{\partial x}(2x)+\frac{\partial}{\partial y}(2y)+\frac{\partial}{\partial z}(0)=2+2+0=\underline{\underline{4}}$$

Curl av vektorfeltet:

$$curl\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]\times[2x,2y,0]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2x & 2y & 0\end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}(0)-\frac{\partial}{\partial z}(2x),\frac{\partial}{\partial z}(2x)-\frac{\partial}{\partial x}(0),\frac{\partial}{\partial x}(2y)-\frac{\partial}{\partial y}(2x)\right]=[0,0,0]=\underline{\underline{\vec{0}}}$$

d) Fluksen Φ ut av legemet T.
Vi lar S være den lukkede flaten som omslutter legemet T, dvs $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.
Vi benytter Gauss' divergensteorem:

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_T \nabla \cdot F dV = \iiint_T 4 dV = 4 \iiint_T dV = 4 \cdot \frac{5}{2}\pi = \underline{\underline{10\pi}}$$

e) Fluksen Φ_1 ut av flaten S_1:

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} [2x, 2y, 0] \cdot [0, 0, -1] dS = \iint_{S_1} 0 dS = 0 \cdot \iint_{S_1} dS = \underline{\underline{0}}$$

Vektorfeltet går parallelt med flaten S_1 og kan derfor ikke ha noen fluks ut av denne flaten.

Fluksen Φ_2 ut av flaten S_2:
Her benytter vi at vektorfeltet er rettet normalt ut av flaten S_2,
at flaten S_2 utbrettet er et rektangel med omkrets 2 og høyde 1
og at $x^2 + y^2$ på denne flaten er lik 1.

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} |\vec{F}| \cdot |\vec{n}| \cos 0 dS = \iint_{S_2} |\vec{F}| \cdot 1 \cdot 1 dS = \iint_{S_2} |\vec{F}| dS \\ &= \iint_{S_2} |[2x, 2y, 0]| dS = \iint_{S_2} \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 0^2} dS = \iint_{S_2} \sqrt{4x^2 + 4y^2} dS \\ &= \iint_{S_2} \sqrt{4(x^2 + y^2)} dS = \iint_{S_2} \sqrt{4 \cdot 1} dS = \iint_{S_2} \sqrt{4} dS = \iint_{S_2} 2 dS = 2 \iint_{S_2} dS \\ &= 2 \cdot 2\pi \cdot 1 \cdot 1 = \underline{\underline{4\pi}}\end{aligned}$$

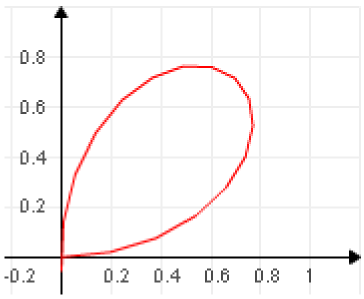
Fluksen Φ_3 ut av flaten S_3:
Her benytter vi at flaten S er unionen av flatene S_1 , S_2 og S_3,
samt at disse tre sistnevnte flatene er disjunkte.

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi_3 = \Phi - \Phi_1 - \Phi_2 = 10\pi - 0 - 4\pi = \underline{\underline{6\pi}}$$

3. Kurve:



a) Arealet av området *R*:

$$A = \iint_R dA = \iint_D r dr d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=\sin 2\theta} r dr d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_{r=0}^{r=\sin 2\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{4} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\theta) d\theta = \underline{\underline{\frac{\pi}{8}}}$$

b) Massen av området R:

$$M = \iint_R dm = \iint_R \rho dA = \rho \iint_R dA = \rho A = \underline{\frac{\pi\rho}{8}}$$

$$M_y = \iint_R x dm = \iint_R x \rho dA = \iint_R x dA = \rho \iint_D x r dr d\theta = \rho \iint_D r \cos\theta r dr d\theta$$

$$= \rho \iint_D r^2 \cos\theta dr d\theta = \rho \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=\sin 2\theta} r^2 \cos\theta dr d\theta = \rho \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3} r^3\right]_{r=0}^{r=\sin 2\theta} \cos\theta d\theta$$

$$= \rho \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \sin^3 2\theta \cos\theta d\theta = \rho \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} (2\sin\theta\cos\theta)^3 \cos\theta d\theta$$

$$= \rho \frac{8}{3} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cos^4\theta d\theta = \rho \frac{8}{3} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \sin\theta (1 - \cos^2\theta) \cos^4\theta d\theta$$

$$= \rho \frac{8}{3} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \sin\theta (\cos^4\theta - \cos^6\theta) \theta d\theta$$

$$= \rho \frac{8}{3} \left[\frac{1}{7}\cos^7\theta - \frac{1}{5}\cos^5\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \underline{\rho \frac{16}{105}}$$

$$x_{cm} = \frac{M_y}{M} = \frac{\rho \frac{16}{105}}{\rho \frac{\pi}{8}} = \underline{\underline{\frac{128}{105\pi}}}$$

4. Siden vektorfeltet er radielt og har konstant lengde, er vektorfeltet gitt ved:

$$\vec{F}(x) = k\,\frac{[x, y]}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{hvor } k \text{ er en konstant}$$

$$\vec{r}(x) = [x, y] = [x, f(x)]$$
$$d\vec{r} = [1, f'(x)]dx$$
$$\vec{F}(x) = k\,\frac{[x, y]}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k\,\frac{[x, f(x)]}{\sqrt{x^2 + (f(x))^2}} = k[x, y]\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} = k[x, f(x)]\left(x^2 + (f(x))^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = k\,\frac{[x, f(x)]}{\sqrt{x^2 + (f(x))^2}} \cdot [1, f'(x)]dx$$
$$= k\,\frac{x + f(x)f'(x)}{\sqrt{x^2 + (f(x))^2}}dx$$
$$= k(x + f(x)f'(x))\left(x^2 + (f(x))^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$
$$= k\frac{d}{dx}\left[\left(x^2 + (f(x))^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]dx$$
$$\underline{= kd\left[\left(x^2 + (f(x))^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]}$$

$$\int_C \vec{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} = \int_{x=a}^{x=b} kd\left[\left(x^2 + (f(x))^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$= k\left[\left(x^2 + (f(x))^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\Bigg|_{x=a}^{x=b}$$
$$\underline{\underline{= \mathrm{k}\left[(\mathrm{b}^2 + (f(b))^2)^{\frac{1}{2}} - (\mathrm{a}^2 + (f(a))^2)^{\frac{1}{2}}\right]}}$$

Eller:

Vi undersøker først hvorvidt vektorfeltet er konservativt.
Vi beregner curl til vektorfeltet, siden et vektorfelt er konservativt
hvis og bare hvis curl til vektorfeltet er lik null-vektor.

$$\vec{F}(x) = k\frac{[x, y]}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left[kx(x^2 + y^2)^{-1/2}, ky(x^2 + y^2)^{-1/2}\right]$$

$$curl\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ kx(x^2 + y^2)^{-1/2} & ky(x^2 + y^2)^{-1/2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left[0{,}0, \frac{\partial}{\partial x}(ky(x^2 + y^2)^{-1/2}) - \frac{\partial}{\partial y}(kx(x^2 + y^2)^{-1/2})\right]$$

$$= \left[0{,}0, -kxy(x^2 + y^2)^{-3/2} + kxy(x^2 + y^2)^{-3/2}\right]$$

$$= [0{,}0{,}0] = \underline{\vec{0}}$$

Vektorfeltet er altså konservativt.
Da finnes en skalarfunksjon $g(x,y,z)$ som er slik at gradienten til g er lik det gitte vektorfeltet.

$$\vec{F}(x) = k\frac{[x, y]}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left[kx(x^2 + y^2)^{-1/2}, ky(x^2 + y^2)^{-1/2}\right]$$

$$\nabla g = \left[\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right] = \vec{F}(x, y)$$

Herav følger:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = kx(x^2 + y^2)^{-1/2}$$

$$g(x, y) = k(x^2 + y^2)^{1/2} + h(y)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = ky(x^2 + y^2)^{-1/2} + \frac{dh}{dy} \stackrel{!}{=} ky(x^2 + y^2)^{-1/2} \Rightarrow \frac{dh}{dy} = 0 \Rightarrow h(y) = K$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{g(x, y) = k(x^2 + y^2)^{1/2} + K}$$

Da har vi videre at det etterspurte integralet er veiuavhengig, dvs kun avhengig av endepunktene.
Vi får da:

$$\int_C \vec{\mathrm{F}} \cdot d\vec{\mathrm{r}} = \int_{(a,f(x)}^{(b,f(b)} \vec{\mathrm{F}} \cdot d\vec{\mathrm{r}} = g(b, f(b)) - g(a, f(a))$$

$$= \left[k(b^2 + (f(b))^2)^{1/2} + K\right] - \left[k(a^2 + (f(a))^2)^{1/2} + K\right]$$

$$= \underline{\underline{\mathrm{k}\left[(\mathrm{b}^2 + (f(b))^2)^{\frac{1}{2}} - (\mathrm{a}^2 + (f(a))^2)^{\frac{1}{2}}\right]}}$$

Eller:

Vi har vist at F-vektor er en konservativ kraft (curl til F-vektor er lik null-vektor).
En kraft som alltid er radielt rettet (i retning ut fra origo) vil være rotasjonsfri og derfor konservativ.
Arbeidet som en slik konservativ kraft utfører langs en vei fra et pkt *A* til et punkt *B* er da uavhengig av veien mellom *A* og *B*.

I figuren nedenfor er punktene A og B, samt en vilkårlig vei mellom *A* og *B* tegnet inn.
Arbeidet W_{AB} som en konservativ kraft *F*-vektor utfører langs en vei fra *A* til *B* kan nå skrives som:

$$W_{OB} = W_{OA} + W_{AB}$$

$$W_{AB} = W_{OB} - W_{OA}$$

Videre har vi at langs veiene OB og OA vil F-vektor ha samme retning som *dr*-vektor.
Derfor vil skalarproduktet av *F*-vektor og *dr*-vektor her være lik lengden *k* av *F*-vektor multiplisert med lengden av *dr*-vektor.
Derfor får vi (i overgangen til siste linje benyttes Pythagoras):

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= W_{AB} = W_{OB} - W_{OA} \\
&= \int_O^B \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_O^A \vec{F}\cdot d\vec{r} \\
&= \int_O^B |\vec{F}||d\vec{r}| - \int_O^A |\vec{F}||d\vec{r}| \\
&= \int_O^B k ds - \int_O^A k ds \\
&= k\int_O^B ds - k\int_O^A ds \\
&= k\left[\int_O^B ds - \int_O^A ds\right] \\
&= k\left[s_{OB} - s_{OA}\right] \\
&= \mathrm{k}\left[(\mathrm{b}^2 + (f(b))^2)^{\frac{1}{2}} - (\mathrm{a}^2 + (f(a))^2)^{\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned}$$