**UNIVERSITETET I AGDER**
**Grimstad**

# E K S A M E N S O P P G A V E :

**FAG: MA-209 Matematikk 3 LÆRER: Per Henrik Hogstad**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Klasse(r):** | **Dato: 04.12.15** | **Eksamenstid, fra-til: 09.00 – 14.00** | |
| **Eksamensoppgaven består av følgende** | **Antall sider: 5 (inkl. forside + vedlegg)** | **Antall oppgaver: 5** | **Antall vedlegg: 1** |
| **Tillatte hjelpemidler er:** | **Kalkulator**<br>**Hogstad: Formler MA-209**<br>**Don't Panic**<br>**Rottmann: Matematisk formelsamling**<br>**(Ikke tillatt å skrive i formelsamlingene)** | | |
| **KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG** | | | |

## MA-209 Ordinær Eksamen Høst 2015

| Oppg nr | | Poeng |
|---|---|---|
| 1 | a | 3 |
| | b | 3 |
| 2 | a | 3 |
| | b | 3 |
| 3 | a | 3 |
| | b | 3 |
| 4 | a | 3 |
| | b | 3 |
| | c | 3 |
| | d | 3 |
| | e | 3 |
| | f | 3 |
| | g | 3 |
| | h | 3 |
| | i | 3 |
| 5 | | 3 |
| Sum | | 48 |

Poengene viser vektfordelingen for de enkelte delspørsmålene.
Ved karaktersetting vektlegges selvfølgelig i tillegg en totalvurdering,
bl.a. en vurdering av i hvilken grad kandidaten har kunnskaper innenfor
de ulike områdene gitt i oppgavesettet.

Besvarelsen skal inneholde mellomregninger.
Kalkulator skal ikke benyttes i beregningene, kun til eventuell kontroll av egne svar.

LYKKE TIL !

1. Vi har gitt følgende dobbelt-integral:

$$\int_{x=0}^{x=4} \int_{y=\frac{1}{2}x}^{y=2} \frac{\sin(y)}{y} dydx$$

   a) Vis ved hjelp av en figur det integrasjonsområdet som det her integreres over.

   b) Beregn dobbelt-integralet ved å bytte om integrasjons-rekkefølgen.

2. Vi har gitt sirkelen $x^2 + y^2 = 4$ og den vertikale linjen $x = 1$.
La $R$ være det området som ligger innenfor den gitte sirkelen og til høyre for den gitte linjen.
Vi skal benytte dobbeltintegral og polarkoordinater til å beregne arealet av området R.

   a) Vis ved hjelp av en figur i det kartesiske koordinatsystemet ($xy$-koordinatsystem) det integrasjonsområdet $R$ som det her skal integreres over.
   Vis deretter ved hjelp av en figur i det polare koordinatsystemet ($r\theta$-koordinatsystem) det integrasjonsområdet $G$ som det her skal integreres over når vi benytter polarkoordinater.

   b) Beregn arealet av området $R$ ved å benytte polarkoordinater.

3. Vi har et område $D$ i planet begrenset av de 5 rette linjestykkene vist i fig 3.1.
Beregn vha Greens arealteorem arealet av området $D$.

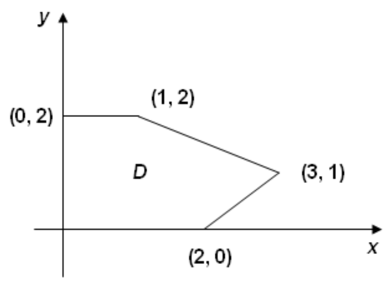



Fig 3.1

   a) Parameteriser de 5 rette linjestykkene som omslutter området $D$.
   For alle disse 5 parameteriseringene skal parameteren $t$ være inneholdt i intervallet [0, 1].

   b) Beregn ved hjelp av Greens arealteorem arealet av området $D$.

4. Et legeme $T$ i rommet er avgrenset av følgende tre flater:

$S_1$: $z = 0$

$S_2$: $x^2 + y^2 = 4y$

$S_3$: $4z - x^2 - y^2 = 0$

La $C$ være skjæringskurven mellom de to flatene $S_2$ og $S_3$ .

Et vektorfelt $F$-vektor er gitt ved:

$$\vec{F} = [0, 3x, 2z + 1]$$

a) Tegn kurven $x^2 + y^2 = 4y$ i $xy$-planet (skjæringskurven mellom $S_2$ og $xy$-planet).
og vis at den polare ligningen for denne kurven er gitt ved $r = 4\sin\theta$.

b) Tegn en skisse av legemet $T$ og forklar hva slags flater $S_1$ , $S_2$ og $S_3$ er.

c) Beregn volumet av legemet $T$.

d) Bestem divergens og curl til det gitte vektorfeltet.

e) Vis at kurven $C$ ligger i et plan parallell med $x$-aksen og finn ligningen for dette planet.

f) Bestem kurveintegralet

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ved direkte beregning (uten bruk av Stokes' teorem) langs den lukkede kurven $C$.

g) Bestem kurveintegralet i oppgave f), men nå ved hjelp av Stokes' teorem.

h) Bestem netto fluks av det gitte vektorfeltet ut av bunnflaten i legemet $T$.

i) Bestem netto fluks av det gitte vektorfeltet ut av den lukkede flaten som omslutter legemet $T$.

5. En funksjon $f(x,y,z)$ kalles harmonisk i et område $T$ i rommet hvis den over hele $T$
oppfyller følgende såkalte Laplace-ligning:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Anta at f er harmonisk i et område $T$ omsluttet av en glatt flate $S$.
La $n$-vektor være enhetsnormalvektor ut av flaten $S$.
Vis at da gjelder følgende:

$$\oiint_S \nabla f \cdot \vec{n} dS = 0$$

$$\oiint_S f\nabla f \cdot \vec{n} dS = \iiint_T |\nabla \mathrm{f}|^2 dV$$

**Vedlegg**:

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1$$

$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$$

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$$

$$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$$

$$\sin 2u = 2 \sin u \cos u$$

$$\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$$

$$\sin^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2}$$

$$(\cos u)' = -\sin u$$

$$(\sin u)' = \cos u$$

$$(\tan u)' = \frac{1}{\cos^2 u}$$

$$(\cosh u)' = \sinh u$$

$$(\sinh u)' = \cosh u$$

$$e^{\ln x} = x$$

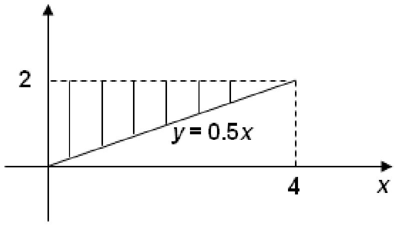
$$(e^x)' = e^x$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$\nabla f$ normalvektor til en flate $S$ som er en nivåflate til $f$

$\vec{n} = \dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$ enhetsnormalvektor til en flate $S$ som er en nivåflate til $f$

1. a) Integrasjonsområde (skravert område):
   Området er begrenset av kurvene $y = 0.5x$, y = 2, $x = 0$, $x = 4$ svarende til integralgrensene.




b) Integral:

$$\int_{x=0}^{x=4}\int_{y=\frac{1}{2}x}^{y=2}\frac{\sin(y)}{y}\,dydx = \int_{y=0}^{y=2}\int_{x=0}^{x=2y}\frac{\sin(y)}{y}\,dxdy$$

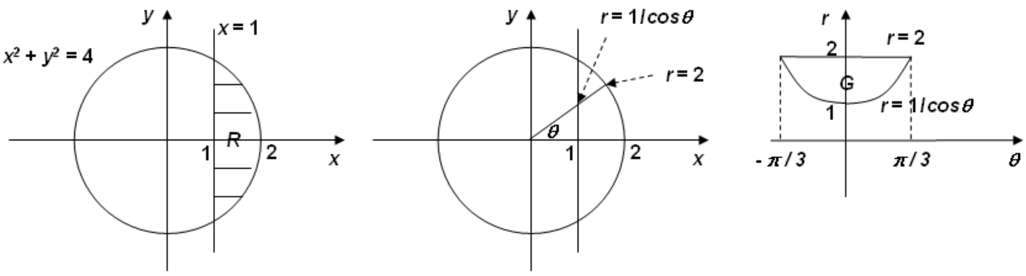
$$= \int_{y=0}^{y=2}\left[x\frac{\sin(y)}{y}\right]_{x=0}^{x=2y}dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=2}2y\frac{\sin(y)}{y}\,dy$$

$$= 2\int_{y=0}^{y=2}\sin(y)dy$$

$$= -2[\cos(\mathrm{y})]_{\mathrm{y}=0}^{y=2} = \underline{\underline{2(1-\cos(2))}}$$

2. a) Integrasjonsområdet i kartesisk og polart koordinatsystem




Kartesisk koordinatsystem

Polart koordinatsystem

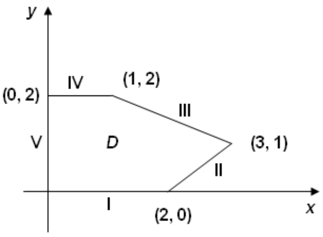
b) Beregning av arealet av området $R$:
   For gitt vil $r$ løpe fra $1 / cos\theta$ til 2. $\theta$ vil løpe fra $\pi / 3$ til $\pi / 3$.
   Ved integral av $1/cos^2\theta$ benyttes formel i vedlegget.

$$A = \iint_R dA = \iint_G rdrd\theta$$

$$= 2\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{3}}\int_{\mathrm{r}=\frac{1}{\cos\theta}}^{\mathrm{r}=2} rdrd\theta = 2\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{3}}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r=\frac{1}{\cos\theta}}^{\mathrm{r}=2}d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{3}}\left(4-\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta = [4\theta-\tan\theta]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{3}} = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}}}$$

3.



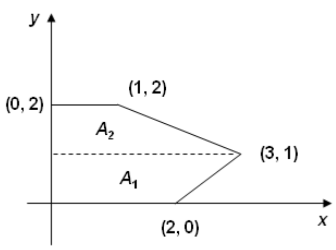

a) Parameterisering

$$\vec{r}(t) = [0,0] + t[2-0, 0-0] = [2t \quad ,0 \quad ] \qquad t \in [0,1] \qquad I$$
$$\vec{r}(t) = [2,0] + t[3-2, 1-0] = [2+t \ , t \quad ] \qquad t \in [0,1] \qquad II$$
$$\vec{r}(t) = [3,1] + t[1-3, 2-1] = [3-2t, 1+t\,] \qquad t \in [0,1] \qquad III$$
$$\vec{r}(t) = [1,2] + t[0-1, 2-2] = [1-t \ , 2 \quad ] \qquad t \in [0,1] \qquad IV$$
$$\vec{r}(t) = [0,2] + t[0-0, 0-2] = [0 \quad ,2-2t] \qquad t \in [0,1] \qquad V$$

b) Beregning av areal vha Greens arealteorem:

$$
\begin{aligned}
A = \oint_C x\,dy &= \int_I x\,dy + \int_{II} x\,dy + \int_{III} x\,dy + \int_{IV} x\,dy + \int_{IV} x\,dy \\
&= \int_I x\underbrace{dy}_{0} + \int_{II} x\,dy + \int_{III} x\,dy + \int_{IV} x\underbrace{dy}_{0} + \int_{IV} \underbrace{x}_{0}dy \\
&= 0 + \int_{II} x\,dy + \int_{III} x\,dy + 0 + 0 \\
&= \int_{II} (2+t)\cdot 1dt + \int_{III} (3-2t)\cdot 1dt \\
&= \int_{t=0}^{t=1} (2+t)dt + \int_{t=0}^{t=1} (3-2t)dt \\
&= \int_{t=0}^{t=1} (5-t)dt = \left[5t - \frac{1}{2}t^2\right]_{t=0}^{t=1} = 5\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \underline{\underline{\frac{9}{2}}}
\end{aligned}
$$

Kontroll (området består av 2 stk trapes):

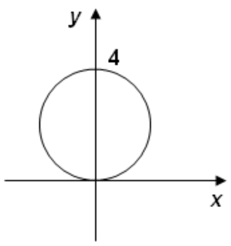



$$A = A_1 + A_2 = \frac{2+3}{2}\cdot 1 + \frac{3+1}{2}\cdot 1 = \frac{5}{2} + 2 = \underline{\underline{\frac{9}{2}}}$$

4. a) Skisse av kurven $x^2 + y^2 = 4y$ i $xy$-planet:

$$x^2 + y^2 = 4y$$
$$x^2 + y^2 - 4y = 0$$
$$x^2 + y^2 - 4y + 2^2 = 2^2$$
$$\underline{x^2 + (y-2)^2 = 2^2}$$

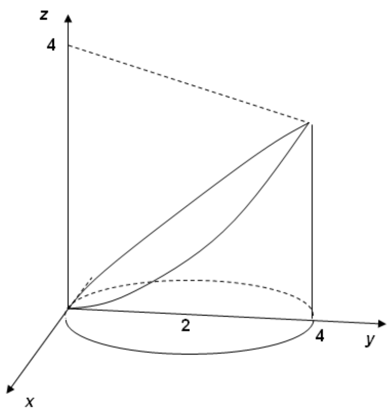
Kurven er en sirkel med sentrum i punktet (0,2) og radius 2.

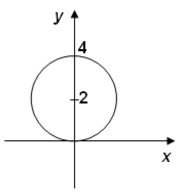


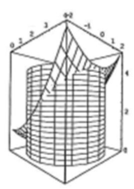

Den polare ligningen for denne kurven er gitt ved:

$$x^2 + y^2 = 4y$$
$$r^2 = 4r\sin\theta$$
$$r^2 - 4r\sin\theta = 0$$
$$r(r - 4\sin\theta) = 0$$
$$r = 0 \quad \vee \quad r - 4\sin\theta = 0$$
$$\underline{\underline{r = 4\sin\theta}} \qquad \theta \in [0, \pi] \qquad (r = 0 \text{ er inkludert i denne})$$

b) Skisse av legemet $T$:



Flaten $S_1$: $z = 0$ er $xy$-planet

Flasten $S_2$: $x^2 + y^2 = 4y$ er en sylinder med senteraksen gjennom (0,2,0) parallell med $z$-aksen og radius 2 (se oppgave 4a).

Flaten $S_3$: $4z - x^2 - y^2 = 0$ er en sirkulær paraboloide $z = ¼\,(x^2 + y^2)$
Med $z$-aksen som senteraksen og bunnpunkt i origo (0,0,0).

c) Volumet av legemet *T*:
For bunnflaten tar vi utgangspunkt i parameteriseringen fra oppgave a), dvs polarkoordinater.
Merk at vinkelen $\theta$ ved en hel runde løper fra 0 til $\pi$.

$$V = \iiint_T dV = \iint_R \int_{z=0}^{z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)} dz\, dA = \frac{1}{4}\iint_R (x^2+y^2)dA$$
$$= \frac{1}{4}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{r=0}^{r=4\sin\theta} r^2 r dr d\theta = \frac{1}{4}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{r=0}^{r=4\sin\theta} r^3 dr d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=4\sin\theta} d\theta$$
$$= 16\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sin^4\theta d\theta = 16\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$
$$= 4\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(1-\cos 2\theta)^2 d\theta = 4\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)d\theta$$
$$= 4\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(1-2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2})d\theta$$
$$= 4\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(\frac{3}{2}-2\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos 4\theta)d\theta = 4\cdot\frac{3}{2}\cdot\pi = \underline{\underline{6\pi}}$$

Eller:
Parameteriserer bunnflaten ved $\boldsymbol{r} = [x,y] = [r\cos\theta, r\sin\theta+2]$, $r \in [0,2]$ og $\theta \in [0, 2\pi]$
hvor avstanden *r* og vinkelen $\theta$ tar utgangspunkt i punktet (0, 2).
Det kan enkelt vises at Jacobi-determinanten her er lik *r* (samme som ved polarkoordinater).

$$V = \iiint_T dV = \iint_R \int_{z=0}^{z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)} dz\, dA = \frac{1}{4}\iint_R (x^2+y^2)dA$$
$$= \frac{1}{4}\iint_G [(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta+2)^2]dA$$
$$= \frac{1}{4}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=2}(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + 4r\sin\theta + 4)rdrd\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=2}(r^3 + 4r^2\sin\theta + 4r)drd\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left[\frac{1}{4}r^4 + \frac{4}{3}r^3\sin\theta + 2r^2\right]_{r=0}^{r=2} d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}(12+\frac{32}{3}\sin\theta)d\theta = \frac{1}{4}\cdot 12\cdot 2\pi = \underline{\underline{6\pi}}$$

d) Divergens til det gitte vektorfeltet:

$$div\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot [0, 3x, 2z+1] = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(3x) + \frac{\partial}{\partial z}(2z+1) = \underline{\underline{2}}$$

Curl til det gitte vektorfeltet:

$$curl\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \times [0, 3x, 2z+1]$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 3x & 2z+1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{[0,0,3]}}$$

e) Kurven *C*:

$$4z - x^2 - y^2 = 0 \qquad \wedge \qquad x^2 + y^2 = 4y$$

$$\Downarrow$$

$$z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) = \frac{1}{4} \cdot 4y = y$$

$$\underline{\underline{z = y}}$$

Kurven ligger i et plan siden ligningen $z = y$ er på formen $ax + by + cz + d = 0$ hvor ikke alle $a$, $b$, $c$, $d$ er lik null (her $a = 0$, $b = -1$, $c = 1$, $d = 0$).
Planet er parallell med $x$-aksen siden $x$ mangler i uttrykket for ligningen av planet.

Herav følger at kurven *C* ligger i et plan parallell med $x$-aksen og ligningen for planet er gitt ved $z = y$.

f) Kurveintegralet av *F*-vektor langs kurven *C*, direkte beregning.
Kurven parameteriseres ved å la parameteren *t* være vinkelen som linjen i *xy*-planet fra punktet (0,2,0) ut til en punkt på sirkelen $x^2 + y^2 = 4y$ danner med *x*-aksen.

$$
\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= [x, y, z] = \left[2\cos t, 2\sin t + 2, 2\sin t + 2\right] \\
d\vec{r} &= [-2\sin t, 2\cos t, 2\cos t]dt \\
\vec{F}(x, y, z) &= [0, 3x, 2z + 1] \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) &= [0, 6\cos t, 4\sin t + 5] \\
\vec{F} \cdot d\vec{r} &= [0, 6\cos t, 4\sin t + 5] \cdot [-2\sin t, 2\cos t, 2\cos t]dt \\
&= 6 + 6\cos 2t + 4\sin 2t + 10\cos t
\end{aligned}
$$

$$
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t=0}^{t=2\pi} (6 + 6\cos 2t + 4\sin 2t + 10\cos t)dt
$$

$$
= \left[6t + 3\sin 2t - 2\cos 2t + 10\sin t\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 6 \cdot 2\pi = \underline{\underline{12\pi}}
$$

g) Kurveintegralet av *F*-vektor langs kurven *C* , bruk av Stokes' teorem.
Vi lar $S_C$ være den delen av flaten $z = y$ som ligger innenfor legemet *T*.
Flaten $S_C$ har da kurven *C* som rand, og vi kan benytte Stokes' teorem.
Vi lar skalerfunksjonen *f* være gitt ved $f(x,y,z) = -y + z$.
Flaten S er da en nivåflate til f gitt ved $f(x,y,z) = 0$.
Gradienten til *f* [0,-1,1] vil da være en normalvektor med korrekt retning til flaten *S*.

$$
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \iint_{S_C} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS
$$

$$
= \iint_R (\nabla \times \vec{F}) \cdot \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA
$$

$$
= \iint_R [0,0,3] \cdot \frac{[0,-1,1]}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{1} dA
$$

$$
= 3\iint_R dA = 3 \cdot \pi \cdot 2^2 = \underline{\underline{12\pi}}
$$

Vi kunne også ha benyttet nedre del av paraboloideflaten som vår flate *S*.
Merk at enhetsnormalvektoren *n*-vektor her må være på innsiden av paraboloideflaten.

h) Netto fluks ut av bunnflaten *T*:
Enhetsnormalvektor ut av bunnflaten er gitt ved [0,0,-1].

$$
\Phi_1 = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} [0, 3x, 2z + 1] \cdot [0,0,-1] dS = -1 \cdot \pi \cdot 2^2 = \underline{\underline{-4\pi}}
$$

i) Netto fluks ut av legemet *T* (benytter Gauss' divergensteorem):

$$
\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_T \nabla \cdot \vec{F} dV = \iiint_T 2dV = 2\iiint_T dV = 2 \cdot 6\pi = \underline{\underline{12\pi}}
$$

5. Fra Gauss' divergensteorem får vi følgende:

$$\oiint_S \nabla f \cdot \vec{n} dS = \iiint_T \nabla \cdot \nabla f dV = \iiint_T \nabla^2 f dV = \iiint_T 0 dV = \underline{\underline{0}}$$

$$f\nabla f = f\left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right] = \left[f\frac{\partial f}{\partial x}, f\frac{\partial f}{\partial y}, f\frac{\partial f}{\partial z}\right]$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot f\nabla f &= \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[f\frac{\partial f}{\partial x}, f\frac{\partial f}{\partial y}, f\frac{\partial f}{\partial z}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(f\frac{\partial f}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(f\frac{\partial f}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(f\frac{\partial f}{\partial z}) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f}{\partial z}) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) + f\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) + f\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f}{\partial z}) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + f\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) \\
&= |\nabla f|^2 + f \cdot 0 \\
&= \underline{|\nabla f|^2}
\end{aligned}$$

$\Downarrow$ Innsetting i Gauss' divergensteorem

$$\oiint_S f\nabla f \cdot \vec{n} dS = \iiint_T \nabla \cdot f\nabla f dV = \underline{\underline{\iiint_T |\nabla \mathrm{f}|^2 dV}}$$