UNIVERSITETET I AGDER
Grimstad

E K S A M E N S O P P G A V E :

FAG: MA-209 Matematikk 3 LÆRER: Per Henrik Hogstad

Klasse(r):	**Dato: 29.02.16**	**Eksamenstid, fra-til: 09.00 – 14.00**	
Eksamensoppgaven består av følgende	**Antall sider: 6 (inkl. forside + vedlegg)**	**Antall oppgaver: 5**	**Antall vedlegg: 1**
Tillatte hjelpemidler er:	**Kalkulator Hogstad: Formler MA-209 Don't Panic Rottmann: Matematisk formelsamling (Ikke tillatt å skrive i formelsamlingene)**		
KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG			

MA-209 Utsatt Eksamen Høst 2015

Oppg nr		Poeng
1	a	3
	b	3
2	a	3
	b	3
3	a	3
	b	3
	c	3
	d	3
	e	3
	f	3
	g	3
	h	3
	i	3
4	a	3
	b	3
5	a	3
	b	3
Sum		51

Poengene viser vektfordelingen for de enkelte delspørsmålene.
Ved karaktersetting vektlegges selvfølgelig i tillegg en totalvurdering,
bl.a. en vurdering av i hvilken grad kandidaten har kunnskaper innenfor
de ulike områdene gitt i oppgavesettet.

Besvarelsen skal inneholde mellomregninger.
Kalkulator skal ikke benyttes i beregningene, kun til eventuell kontroll av egne svar.

LYKKE TIL !

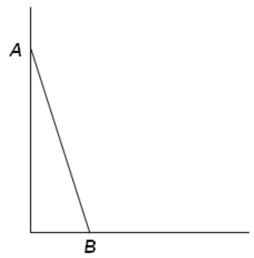
1. a) Vi har gitt følgende polare kurve:

$$r = e^{2\theta} \qquad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Tegn en skisse av denne kurven i *xy*-planet.
Bestem deretter lengden av denne kurven.

b) Den øvre enden av en stige når opp til et punkt *A* på en vertikal vegg.
Den nedre enden av stigen er plassert i et punkt *B* på et horisontalt underlag.
Den nedre enden av stigen begynner å gli på det horsontale underlaget,
mens den øvre enden av stigen glir nedover langs den vertikale veggen.

Vis at ethvert punkt på stigen under denne nevnte bevegelsen beveger seg langs en ellipsebane,
bortsett fra stigens midtpunkt som beveger seg langs en sirkelbane og stigens endepunkter
som beveger seg langs en rett linje.
Hint: Merk av et punkt *P* på stigen og sett avstanden *PA* = *a* og avstanden *PB* = *b* .



2. Vi har gitt følgende dobbelt-integral:

$$\int_{y=0}^{y=\frac{2}{3}} \int_{x=y}^{x=2-2y} (x+2y)e^{y-x}\,dxdy$$

a) Vis ved hjelp av en figur det integrasjonsområdet *R* i *xy*-planet som det her integreres over.

b) Til å beregne det gitte integralet skal du benytte følgende substitusjon:

$$u = x + 2y$$
$$v = x - y$$

Vis ved hjelp av en figur det tilhørende integrasjonsområdet *G* i uv-planet
som det skal integreres over.

Beregn deretter det gitte dobbelt-integralet ved hjelp av den gitte substitusjonen.

3. Et legeme D i rommet er begrenset av følgende tre flater:

S_1: $z = -1$
S_2: $x^2 + y^2 = 1$ $z \geq -1$
S_3: $z = y$ $z \geq -1$

S er den flaten som omslutter legemet D, dvs S er gitt ved følgende union: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.
Kurven C er skjæringskurven mellom de to flatene S_2 og S_3 .
Kurven C er orientert i positiv retning mot klokka sett ovenfra nedover langs z-aksen.

Vi har videre gitt følgende to vektorfelt:

$$\vec{F} = [y, 2z, 3x]$$
$$\vec{G} = [2xy^2, 2x^2y + e^z, ye^z]$$

a) Tegn og forklar hver av de tre flatene S_1, S_2 og S_3
Tegn en skisse av legemet D og bestem ved hjelp av trippelintegral volumet V av legemet D.
Kontroller svaret for volumet ved rent geometriske betraktninger.

b) Bestem divergens og curl til vektorfeltet gitt ved F-vektor.

c) Bestem ved direkte beregning (uten bruk av Stokes teorem)
sirkulasjonen langs kurven C av vektorfeltet gitt ved F-vektor.

d) Bestem vha Stokes teorem sirkulasjonen langs kurven C av vektorfeltet gitt ved F-vektor.

e) Bestem fluksen ut av den lukkede flaten S av vektorfeltet gitt ved F-vektor.

f) Bestem fluksen ut av toppflaten S_3 av vektorfeltet gitt ved F-vektor.

g) Vis at sirkulasjonen av vektorfeltet gitt ved G-vektor er lik null for alle lukkede kurver i rommet.

h) Bestem en potensialfunksjon til vektorfeltet gitt ved G-vektor.

i) Bestem kurveintegralet av vektorfeltet gitt ved G-vektor
langs kurven C fra kurvens laveste punkt til kurvens høyeste punkt.

4. Vi har en stav med lengde L og diffusivitet k.
   Vi plasserer staven langs x-aksen med stavens venstre endepunkt i origo.
   Staven varmes opp og temperaturen som funksjon av x ved tiden $t = 0$
   er gitt ved funksjonen $f(x)$.

   Vi isolerer sideveggene i staven og plasserer ved tiden $t = 0$ en blanding av is og vann
   ved stavens to endepunkter slik at disse hele tiden holder temperatur null grader celcius.

   Stavens temperatur $u = u(x,t)$ som funksjon av posisjonen x og tiden t
   er nå gitt ved følgende partielle differensialligning:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L \qquad t > 0 \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad u(x,0) = f(x)$$

   For å løse denne partielle differensialligningen, setter vi:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

   hvor X er en funksjon av kun posisjonen x alene og T er en funksjon kun av tiden t alene.

   a) Vis at dette gir opphav til følgende to ordinære differensialligninger:

$$X'' + \lambda X = 0$$
$$T' + \lambda kT = 0$$

   hvor λ er en konstant (videre beregninger viser at denne konstanten λ er positiv, men dette trenger du ikke vise i denne oppgaven).

   b) Vis at tilleggsbetingelsene gitt ovenfor i oppgaven:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

   medfører følgende:

$$X(0) = X(L) = 0$$

5. a) Vis at volumet V av et romlig legeme D omsluttet av den glatte, lukkede overflaten S er gitt ved:

$$V = \frac{1}{3}\oiint_S \vec{r} \cdot \vec{n}\, dS$$

   hvor r-vektor er posisjonsvektoren $[x, y, z]$ til punktet (x,y,z)
   og hvor n-vektor er enhetsnormalvektor ut av flaten S.

   b) La D være et romlig legeme med glatt, lukket overflate S. La F-vektor representere et vektorfelt med kontinuerlige første-partiellderiverte komponenter i området D.
   Vis at hvis F-vektor har lengde mindre enn eller lik 1, så vil verdien av følgende trippel-integral:

$$\iiint_D \nabla \cdot \vec{F}\, dV$$

   være minde enn eller lik arealet av flaten S.

Vedlegg:

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1$$
$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$$
$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$$
$$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$$
$$\sin 2u = 2 \sin u \cos u$$
$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$
$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$
$$(\cos u)' = -\sin u$$
$$(\sin u)' = \cos u$$
$$(\tan u)' = \frac{1}{\cos^2 u}$$
$$(\cosh u)' = \sinh u$$
$$(\sinh u)' = \cosh u$$
$$e^{\ln x} = x$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

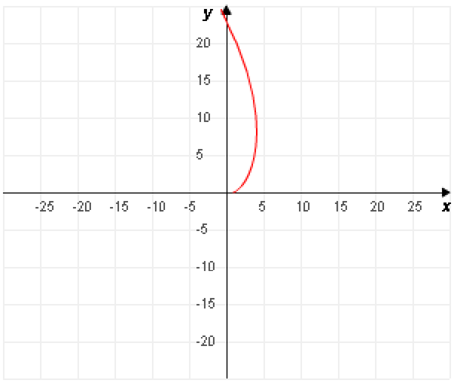
∇f normalvektor til en flate S som er en nivåflate til f

$\vec{n} = \dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$ enhetsnormalvektor til en flate S som er en nivåflate til f

1. a) Polar kurve:

$$r = \mathrm{e}^{2\theta} \qquad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Graf:

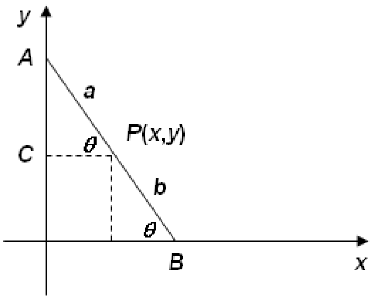


Kurvelengde:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\mathrm{r}^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\mathrm{e}^{2\theta}\right)^2 + \left(2\mathrm{e}^{2\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{e^{4\theta} + 4\mathrm{e}^{4\theta}}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{5e^{4\theta}}\, d\theta$$

$$= \sqrt{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\theta} d\theta = \sqrt{5} \cdot \left[\frac{1}{2} e^{2\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{2}(e^{\pi} - 1)}}$$

b) Kurven som punktet *P* følger:



Av figuren ser vi følgende:

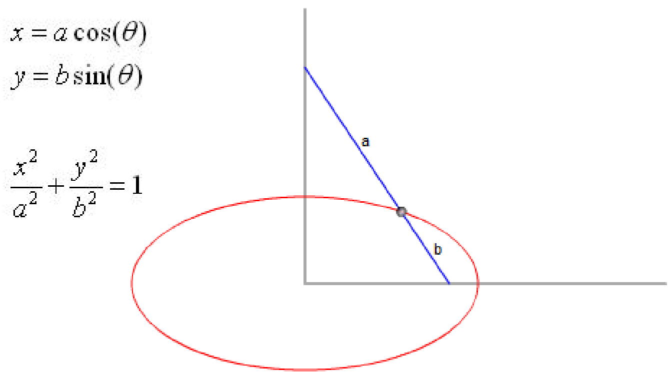
$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\theta \\ y &= b\sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{r}(\theta) = [a\cos\theta, b\sin\theta]$$

$$\underline{\underline{\text{Dette er parameterisering av en ellipse med sentrum i origo med halvakser } a \text{ og } b}}$$

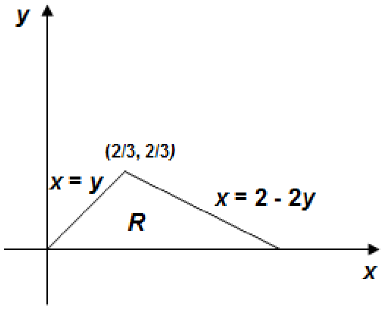
Eller:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\theta \\ y &= b\sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \\ \underline{\underline{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}} \quad \text{Ellipse med sentrum i origo med halvakser a og b} \end{cases}$$

Fra begge metodene ser vi følgende av parameteriseringen:
Vi lar *L* være lengden av stigen, dvs *L* = *a* + *b* .
a = *b* gir en sirkel
a = 0 gir *x* = 0, *y* = *Lsinθ*, dvs et rett vertikalt linjestykke langs *y*-aksen
b = 0 gir *x* = *Lcosθ*, dvs et rett horisontalt linjestykke langs *x*-aksen



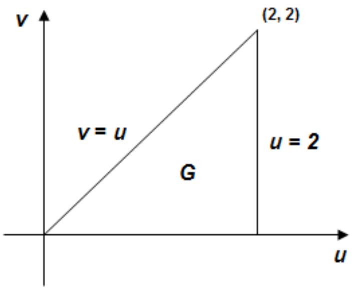
2. a) Integrasjonsområde R i *xy*-planet:



b) Integrasjonsområdet *G* i *uv*-planet:

Grenser:

$$\left.\begin{aligned} u &= x+2y \\ v &= x-y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = y & \text{gir} \quad v = 0 \\ y = 0 & \text{gir} \quad v = u \\ x = 2-2y & \text{gir} \quad u = 2 \end{cases}$$



Bestemmelse av Jacobi-determinant:

$$\mathrm{J}_{\mathrm{r}^{-1}}(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x+2y) & \frac{\partial}{\partial y}(x+2y) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x-y) & \frac{\partial}{\partial y}(x-y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \underline{-3}$$

$$J_r(u,v) = \frac{1}{\mathrm{J}_{\mathrm{r}^{-1}}(x,y)} = \frac{1}{-3} = \underline{-\frac{1}{3}}$$

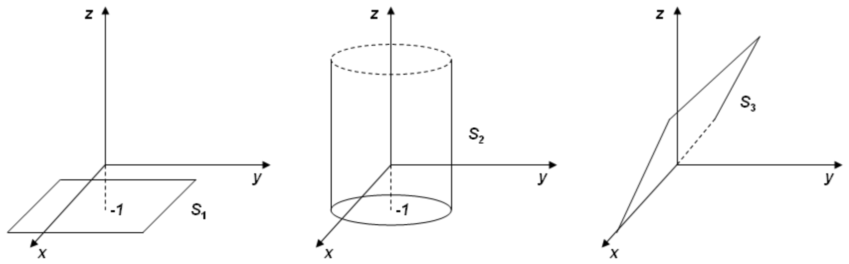
Beregning av integralet:

$$\int_{u=0}^{u=2} \int_{v=0}^{v=u} (x+2y)e^{(y-x)}\,dxdy = \int_{u=0}^{u=2} \int_{v=0}^{v=u} ue^{-v} \left|-\frac{1}{3}\right| dvdu$$

$$= \frac{1}{3} \int_{u=0}^{u=2} \int_{v=0}^{v=u} ue^{-v}\,dvdu$$

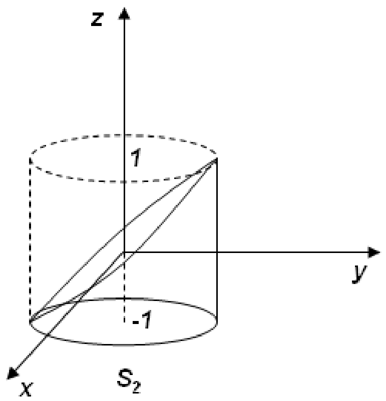
$$= \frac{1}{3} \int_{u=0}^{u=2} \mathrm{u}\left[-\mathrm{e}^{-\mathrm{v}}\right]_{v=0}^{v=u} du = \frac{1}{3} \int_{u=0}^{u=2} \mathrm{u}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{u}})du = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}u^2 + ue^{-u} + e^{-u}\right]_{u=0}^{u=2} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\left[1+3e^{-2}\right]}}$$

3. a) Skisse av flatene S_1, S_2 og S_3:



S_1: Plan parallelt med *xy*-planet i høyde $z = -1$
S_2: Sylinderflate med *z*-aksen som senterakse, radius 1 og $z \in [-1,\infty\rangle$
S_3: Plan gjennom *x*-aksen og som danner 45 grader med *xy*-planet

Skisse av legemet *D*:
Nedre høyre haldel av sylinderen beskrevet ovenfor med $z \in [-1,1]$



Volumet av legemet *D* beregnet vha trippelintegral:

$$
\begin{aligned}
V = \iiint_D dV &= \iint_R \int_{z=-1}^{z=y} dz dA \\
&= \iint_R [z]_{z=-1}^{z=y} dA \\
&= \iint_R (y+1) dA \\
&= \iint_R y dA + \iint_R 1 dA \quad \text{Det første integralet er lik null (symmetrigrunner)} \\
&= \iint_R dA \quad \text{Arealet av området R (sirkel med radius 1)} \\
&= \pi \cdot 1^2 = \underline{\underline{\pi}}
\end{aligned}
$$

Geometriske betrakninger:
Volumet av *D* er lik volumet av en halv sylinder med radius 1 og høyde 2, dvs $1/2 \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = \pi$.

b) Divergens av vektorfeltet gitt ved *F*-vektor:

$$\vec{F} = [y, 2z, 3x]$$

$$div\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot [y, 2z, 3x] = \frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(2z) + \frac{\partial}{\partial z}(3x) = \underline{\underline{0}}$$

Curl til vektorfeltet gitt ved *F*-vektor:

$$\vec{F} = [y, 2z, 3x]$$

$$curl\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \times [y, 2z, 3x] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & 2z & 3x \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(3x) - \frac{\partial}{\partial z}(2z), \frac{\partial}{\partial z}(y) - \frac{\partial}{\partial x}(3x), \frac{\partial}{\partial x}(2z) - \frac{\partial}{\partial y}(y)\right]$$

$$= [0 - 2, 0 - 3, 0 - 1]$$

$$= \underline{\underline{[-2, -3, -1]}}$$

c) Kurveintegralet av F langs kurven C (direkte beregning):

$$\vec{r}(t) = [\cos t, \sin t, \sin t] \qquad d\vec{r} = [-\sin t, \cos t, \cos t]dt$$

$$\vec{F}(x, y, z) = [y, 2z, 3x]$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = [\sin t, 2\sin t, 3\cos t]$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = [\sin t, 2\sin t, 3\cos t] \cdot [-\sin t, \cos t, \cos t]dt$$

$$= (-\sin^2 t + 2\sin t\cos t + 3\cos^2 t)dt$$

$$= (-(1 - \cos^2 t) + 2\sin t\cos t + 3\cos^2 t)dt$$

$$= (4\cos^2 t + \sin 2t - 1)dt$$

$$= (4\frac{1 + \cos 2t}{2} + \sin 2t - 1)dt$$

$$= (2 + 2\cos 2t + \sin 2t - 1)dt$$

$$= \underline{(2\cos 2t + \sin 2t + 1)dt}$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C (2\cos 2t + \sin 2t + 1)dt = \oint_C 2\cos 2t dt + \oint_C \sin 2t dt + \oint_C 1 dt$$

$$= \oint_C 1 dt = \oint_C dt = \int_0^{2\pi} dt = [t]_0^{2\pi} = \underline{\underline{2\pi}}$$

Integralet langs kurven *C* av de to integralene med trigonometriske integrander er lik null.

d) Kurveintegralet av F vha Stokes teorem (Flaten S_3 (positive side opp) har kurven C som rand):

$f(x,y,z) = z - y$ Flaten S_3 er gitt ved nivåflaten $f(x,y,z) = 0$, dvs $z = y$

$$\nabla f = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] f(x,y,z) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(z-y), \frac{\partial}{\partial y}(z-y), \frac{\partial}{\partial z}(z-y)\right] = \underline{[0,-1,1]}$$

$$|\nabla f| = |[0,-1,1]| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \underline{\sqrt{2}}$$

$$\nabla f \cdot \vec{p} = [0,.1,1] \cdot [0,0,1] = \underline{1}$$

$$|\nabla f \cdot \vec{p}| = |1| = \underline{1}$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}[0,-1,1]}$$

$$dS = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA = \frac{\sqrt{2}}{1} dA = \underline{\sqrt{2} dA}$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_3} (\nabla \times F) \cdot \vec{n} dS$$

$$= \iint_R [.-2,-3,-1] \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [0,-1,1] \sqrt{2} dA = 2 \iint_R dA = 2\pi \cdot 1^2 = \underline{\underline{2\pi}}$$

e) Nettofluks ut av legemet D (benytter Gauss' divergensteorem):

$$\Phi_S = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} = \iiint_D \nabla \cdot \vec{F} dV = \iiint_D 0 dV = \underline{\underline{0}}$$

f) Nettofluks ut av toppflaten S_3:

$$\Phi_{S_3} = \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_R [y,2z,3x] \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [0,-1,1] \sqrt{2} dA$$

$$= \iint_R (3x - 2z) dA = \iint_R (3x - 2y) dA \qquad z = y \text{ på } S_3$$

$$= 3\iint_R x dA - 2\iint_R y dA = 0 - 0 = \underline{\underline{0}} \qquad \text{(symmetri)}$$

g) Kurveintgralet av vektorfeltet representert ved *G*-vektor langs enhver lukket kurve i rommet er lik null er ekvivalent med at curl *G* er lik null-vektor.

$$\vec{G} = \left[2xy^2, 2x^2y + e^z, ye^z\right]$$

$$curl\vec{G} = \nabla \times \vec{G} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \times \left[2xy^2, 2x^2y + e^z, ye^z\right]$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy^2 & 2x^2y + e^z & ye^z \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(ye^z) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^2y + e^z), \frac{\partial}{\partial z}(2xy^2) - \frac{\partial}{\partial x}(ye^z), \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y + e^z) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2)\right]$$

$$= \left[e^z - e^z, 0 - 0, 4xy - 4xy\right]$$

$$= \underline{\underline{\left[0,0,0\right]}}$$

h) Potensialfunksjon φ til G:

$$\vec{G} = \left[2xy^2, 2x^2y + e^z, ye^z\right]$$

$$\vec{G} = \nabla\varphi = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2xy^2$$

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx = \int 2xy^2 dx$$

$$\varphi(x, y, z) = x^2y^2 + g(y, z)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2x^2y + \frac{\partial g}{\partial y} \stackrel{!}{=} 2x^2y + e^z \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = e^z \Rightarrow g(y, z) = ye^z + h(z)$$

$$\varphi(x, y, z) = x^2y^2 + ye^z + h(z)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 + ye^z + \frac{dh}{dz} \stackrel{!}{=} ye^z \Rightarrow \frac{dh}{dz} = 0 \Rightarrow h(z) = c$$

$$\underline{\underline{\varphi(x, y, z) = x^2y^2 + ye^z + c}}$$

i) Kurveintegral:

$$\int_{C/2} \vec{G} \cdot d\vec{r} = \int_{C/2} \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = \left[\varphi(x, y, z)\right]_{(0,-1,-1)}^{(0,1,1)} = \varphi(0,1,1) - \varphi(0,-1,-1)$$

$$= (0^2 \cdot 1^2 + 1e^1 + c) - (0^2 \cdot (-1)^2 + (-1)e^{-1} + c) = \underline{\underline{e + e^{-1}}}$$

4. Varmeligning:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L \quad t > 0 \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad u(x,0) = f(x)$$

a) Overføring til ordinære diff.ligninger:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underline{X(x)T'(t)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \underline{X''(x)T(t)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t)$$

$$XT' = kX''T$$

$\frac{X''}{X} = \frac{1}{k}\frac{T'}{T} = -\lambda$ hvor λ er en konstant (minustegn kun pga at λ kan vises å være positiv)

Venstre side en funksjon av kun x, høyre side en funksjon av kun t,
derfor må begge være lik en konstant (her kalt - λ)

$$\underline{\underline{X''+\lambda X = 0 \quad \text{og} \quad T'+\lambda kT = 0}}$$

b) Tilleggsbetingelser:

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \\ u(L,t) = X(L)T(t) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{X(0) = X(L) = 0 \text{ siden } T(t) = 0 \text{ gir en triviell, uinteressant løsning}}}$$

4. Oppgave 4 løst med litt flere detaljer:

Varmeligning:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L \quad t > 0 \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad u(x,0) = f(x)$$

a) For å løse denne partielle differensialligningen, setter vi:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

hvor X er en funksjon av kun posisjonen x alene og T er en funksjon kun av tiden t alene.

Viser at dette gir opphav til følgende to ordinære differensialligninger:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L \quad t > 0 \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad u(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[X(x)T(t)] = \frac{\partial}{\partial t}[X(x)]T(t) + X(x)\frac{\partial}{\partial t}[T(t)] = 0\cdot T(t) + X(x)\cdot T'(t) = \underline{X(x)T'(t)}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[X(x)T(t)] = \frac{\partial}{\partial x}[X(x)]T(t) + X(x)\frac{\partial}{\partial x}[T(t)] = X'(x)T(t) + X(x)\cdot 0 = \underline{X'(x)T(t)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}[X'(x)T(t)]$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}[X'(x)]T(t) + X'(x)\frac{\partial}{\partial x}[T(t)] = X''(x)T(t) + X'(x)\cdot 0 = \underline{X''(x)T(t)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t)$$
$$XT' = kX''T$$
$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{k}\frac{T'}{T} = -\lambda$$ hvor λ er en konstant (minustegn kun pga at λ kan vises å være positiv)

Venstre side en funksjon av kun x, høyre side en funksjon av kun t,
derfor må begge være lik en konstant (her kalt - λ)

$$\frac{X''}{X} = -\lambda \quad \text{og} \quad \frac{1}{k}\frac{T'}{T} = -\lambda$$

$$\underline{\underline{X'' + \lambda X = 0 \quad \text{og} \quad T' + \lambda kT = 0}}$$

b) Tilleggsbetingelser:

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \\ u(L,t) = X(L)T(t) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{X(0) = X(L) = 0 \text{ siden } T(t) = 0 \text{ gir en triviell, uinteressant løsning}}}$$

5. a) Volumet V er gitt ved:

$$\vec{r} = [x, y, z]$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla \cdot \vec{r} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot [x, y, z] = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = \underline{3}$$

$\Downarrow$ Benytter Gauss' divergensteorem

$$\oiint_S \vec{r} \cdot \vec{n} dS = \iiint_D \nabla \cdot \vec{r} dV = \iiint_D 3 dV = 3 \iiint_D dV = 3V$$

$$\underline{\underline{V = \frac{1}{3} \oiint_S \vec{r} \cdot \vec{n} dS}}$$

Eller ('snudd litt på hodet'):

$$\vec{r} = [x, y, z]$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla \cdot \vec{r} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot [x, y, z] = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = \underline{3}$$

$\Downarrow$ Benytter Gauss' divergensteorem

$$V = \iiint_D dV = \frac{1}{3} \iiint_D 3 dV = \frac{1}{3} \iiint_D \nabla \cdot \vec{r} dV = \underline{\underline{\frac{1}{3} \oiint_S \vec{r} \cdot \vec{n} dS}}$$

b)

$\iiint_D \nabla \cdot \vec{F} dV$	$= \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$	Divergensteoremet
	$\leq \oiint_S \left\| \vec{F} \cdot \vec{n} \right\| dS$	Integral – egenskap
	$= \oiint_S \left\| \left\|\vec{F}\right\| \cdot \left\|\vec{n}\right\| \cos\theta \right\| dS$	Skalarprodukt
	$= \oiint_S \left\|\vec{F}\right\| \cdot \left\|\vec{n}\right\| \left\|\cos\theta\right\| dS$	Absoluttverdi – egenskap
	$\leq \oiint_S 1 \cdot 1 \cdot 1 dS$	$\left\|\vec{F}\right\| \leq 1 \quad \left\|\vec{n}\right\| = 1 \quad \left\|\cos\theta\right\| \leq 1$
	$= \oiint_S dS$	Forenkling
	$= S$	Definisjon av areal

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{\iiint_D \nabla \cdot \vec{F} dV \leq S}}$$