UNIVERSITETET I AGDER
Grimstad

E K S A M E N S O P P G A V E :

FAG: MA-209 Matematikk 3 LÆRER: Per Henrik Hogstad

Klasse(r):	**Dato: 08.12.16**	**Eksamenstid, fra-til: 09.00 – 14.00**	
Eksamensoppgaven består av følgende	**Antall sider: 6 (inkl. forside + vedlegg)**	**Antall oppgaver: 5**	**Antall vedlegg: 1**
Tillatte hjelpemidler er:	**Kalkulator Hogstad: Formler MA-209 Don't Panic Rottmann: Matematisk formelsamling (Ikke tillatt å skrive i formelsamlingene)**		
KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG			

MA-209 Ordinær Eksamen Høst 2016

Oppg nr		Poeng
1	a	3
	b	3
2	a	3
	b	3
3	a	3
	b	3
4	a	3
	b	3
	c	3
	d	3
	e	3
	f	3
	g	3
	h	3
	i	3
5		3
Sum		48

Poengene viser vektfordelingen for de enkelte delspørsmålene.
Ved karaktersetting vektlegges selvfølgelig i tillegg en totalvurdering,
bl.a. en vurdering av i hvilken grad kandidaten har kunnskaper innenfor
de ulike områdene gitt i oppgavesettet.

Besvarelsen skal inneholde mellomregninger.
Kalkulator skal *ikke* benyttes i beregningene, kun til eventuell kontroll av egne svar.
Ta egne forutsetninger hvis du finner uklarheter i oppgavesettet.

LYKKE TIL !

1. Vi har gitt følgende dobbelt-integral:

$$\int_{x=0}^{x=3} \int_{y=\sqrt{\frac{x}{3}}}^{y=1} e^{y^3}\, dydx$$

   a) Vis ved hjelp av en figur det integrasjonsområdet som det her integreres over.

   b) Beregn dobbelt-integralet ved å bytte om integrasjons-rekkefølgen.

2. Vi har gitt følgende to polar kurver:

$$r = 2\cos\theta \qquad \theta \in [0, \pi]$$
$$r = 2\sin\theta \qquad \theta \in [0, \pi]$$

   a) Tegn disse to polar kurvene i samme *xy*-koordinatsystem.
   Forklar hva slags kurver disse to polar kurvene er.

   b) Bestem arealet av felles-området (overlappende område)
   som er innenfor begge disse to polar kurvene.

3. Vi har en såkalt 'tåredråpe' beskrevet ved følgende parameteriserte kurve:

$$\vec{r}(t) = [2a\cos t - a\sin 2t, b\sin t] \qquad t \in [0, 2\pi]$$

hvor *a* og *b* er positive konstanter (se figur 3.1).

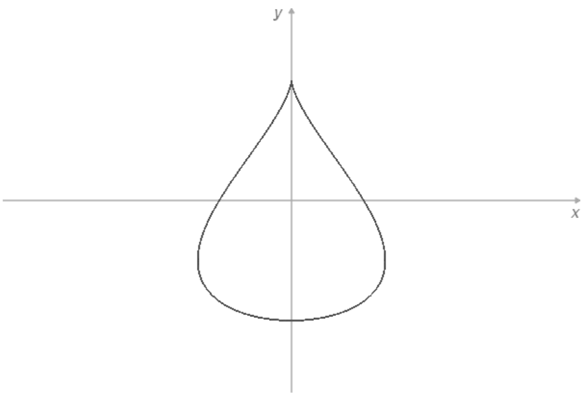


Fig 3.1

   a) Beregn og/eller forklar hvor vi finner igjen *a* og *b* på figuren.

   b) Benytt Greens arealteorem til å bestemme arealet av denne tåredråpen.

4. Vi har gitt følgende to flater:

S_1: $z = x^2 + (y-1)^2$

S_2: $z = 5 - 2y$

Videre har vi gitt følgende vektorfelt:

$$\vec{F} = [0, 3y, 2x]$$

a) Forklar hva slags flater S_1 og S_2 er.
Tegn det legemet T som er avgrenset av de to flatene S_1 og S_2.

b) Vis at projeksjonen ned i xy-planet av skjæringskurven C mellom de to flatene S_1 og S_2 er en sirkel med sentrum i origo og radius 2.

c) Bestem en parameterisering av kurven C.
Kurven skal for økende parameterverdi gjennomløpes i retning mot klokka sett ovenfra nedover langs z-aksen.

d) Beregn ved hjelp av trippelintegral volumet av legemet T.

e) Bestem divergens og curl til det gitte vektorfeltet.

f) Bestem kurveintegralet:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ved direkte beregning, dvs uten bruk av Stokes teorem.

g) Bestem kurveintegralet i oppgave f) ved hjelp av Stokes teorem.

h) Bestem netto fluks av det gitte vektorfeltet ut av det lukkede legemet T.

i) Bestem netto fluks av det gitte vektorfeltet ut av hver av de to gitte flatene S_1 og S_2 som avgrenser legemet T.

5. La

$$\vec{E}(x,y,z,t) \quad \text{og} \quad \vec{B}(x,y,z,t)$$

representere henholdsvis det elektriske og det magnetiske feltet i et punkt (x, y, z) ved tidspunkt t.

Fra elektromagnetisme er det velkjent at vi har følgende sammenheng mellom curl til det elektriske feltet (E-vektor) og den partiellderiverte med hensyn på tiden av det magnetiske feltet (B-vektor):

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

La oss nå tenke oss at vi har en lukket sløyfe av en metalltråd som det kan gå strøm gjennom. En slik strøm vil gå i denne sløyfen hvis vi har en elektromotorisk spenning i denne sløyfen. Denne spenningen er gitt ved kurveintegralet av det elektriske feltet langs denne lukkede sløyfen.

Benytt Stokes teorem til å vise at hvis vi forandrer fluksen av det magnetiske feltet gjennom en flate som har denne sløyfen som rand, så får vi en elektromotorisk spenning i denne sløyfen, dvs det vil gå strøm i denne sløyfen.

I praksis kan vi endre en slik fluks ved å bevege en magnet i nærheten av sløyfen (se fig 5.1).

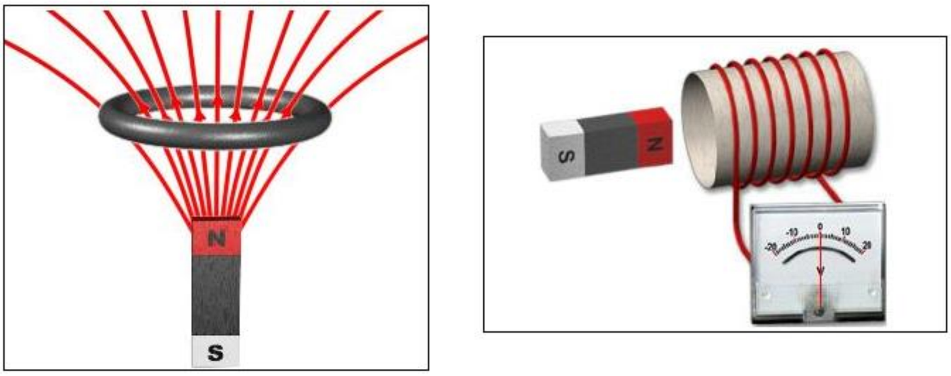


Fig 5.1

Vedlegg:

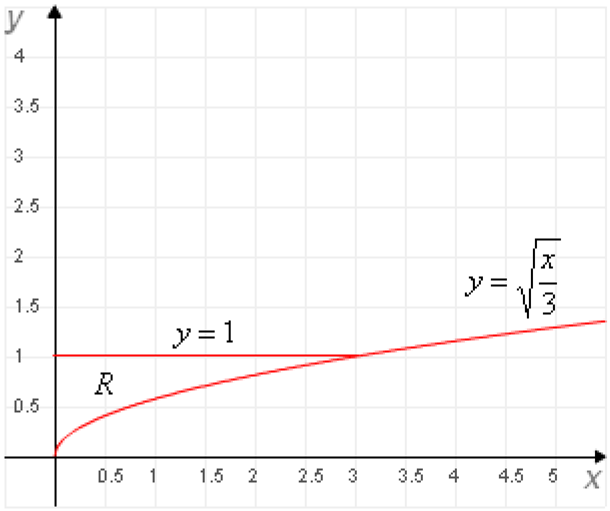
$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1$$
$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$$
$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$$
$$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$$
$$\sin 2u = 2 \sin u \cos u$$
$$\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$$
$$\sin^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2}$$
$$(\cos u)' = -\sin u$$
$$(\sin u)' = \cos u$$
$$(\tan u)' = \frac{1}{\cos^2 u}$$
$$(\cosh u)' = \sinh u$$
$$(\sinh u)' = \cosh u$$
$$e^{\ln x} = x$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

∇f normalvektor til en flate S som er en nivåflate til f

$\vec{n} = \dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$ enhetsnormalvektor til en flate S som er en nivåflate til f

Løsning:

1. Integrasjonsområde:



$$\int_{x=0}^{x=3} \int_{y=\sqrt{\frac{x}{3}}}^{y=1} e^{y^3} dydx = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=3y^2} e^{y^3} dxdy$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \left[xe^{y^3} \right]_{x=0}^{x=3y^2} dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} 3y^2 e^{y^3} dy = \left[e^{y^3} \right]_{y=0}^{y=1} = \underline{\underline{e-1}}$$

2. Vi har gitt følgende to polar kurver:

$$r = 2\cos\theta \qquad \theta \in [0,\pi]$$
$$r = 2\sin\theta \qquad \theta \in [0,\pi]$$

a) Forklaring av kurvene:

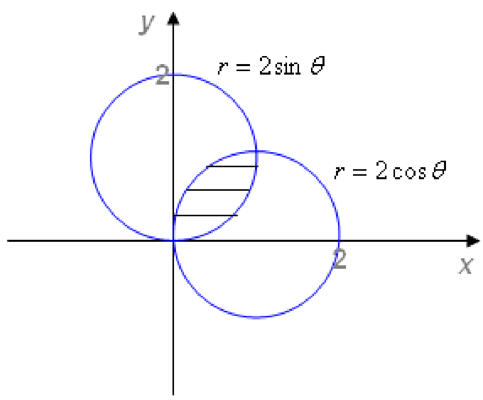
$$r = 2\cos\theta \qquad |\cdot r$$
$$r^2 = 2r\cos\theta$$
$$x^2 + y^2 = 2x$$
$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1^2 + y^2 = 1^2$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 1^2$$

Denne kurven er en sirkel med sentrum i (1,0) og radius 1.

$$r = 2\sin\theta \qquad |\cdot r$$
$$r^2 = 2r\sin\theta$$
$$x^2 + y^2 = 2y$$
$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2y + 1^2 = 1^2$$
$$x^2 + (y-1)^2 = 1^2$$

Denne kurven er en sirkel med sentrum i (0,1) og radius 1.

En skisse av de to polare kurvene og fellesområdet som befinner seg innenfor begge kurvene (merk at vi får tegnet hele sirkelen (for begge kurvene) når θ ligger i intervallet $[0,\pi]$):



Arealet av fellesområdet som befinner seg innenfor begge de to polare kurvene:

$$r = 2\cos\theta \qquad \theta \in [0, \pi]$$
$$\mathrm{r} = 2\sin\theta \qquad \theta \in [0, \pi]$$

$$2\cos\theta = 2\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

Arealet beregnes som det dobbelte av arealet som traverseres når r - vektor roterer fra 0 til $\pi/4$ innenfor den polare kurven $r = 2\sin\theta$

$$A = \iint_R dA = \iint_g \mathrm{rdrd}\theta = 2\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}\int_{r=0}^{r=2\sin\theta} \mathrm{rdr}d\theta = 2\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{r=2\sin\theta} d\theta$$
$$= 2\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(2\sin\theta)^2\, d\theta = 4\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta d\theta = 4\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$
$$= 2\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2\theta)d\theta = 2\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - 1}}$$

Eller:

Arealet beregnes som det dobbelte av arealet som traverseres når r - vektor roterer fra $\pi/4$ til $\pi/2$ innenfor den polare kurven $r = 2\cos\theta$

$$A = \iint_R dA = \iint_g \mathrm{rdrd}\theta = 2\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{r=2\cos\theta} \mathrm{rdr}d\theta = 2\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta$$
$$= 2\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(2\cos\theta)^2\, d\theta = 4\int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = 4\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$
$$= 2\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)d\theta = 2\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - 1}}$$

Eller (kombinasjon av de to foregående løsningene):

$$A = \iint_R dA = \iint_g \mathrm{rdrd}\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}\int_{r=0}^{r=2\sin\theta} \mathrm{rdr}d\theta + \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{r=2\cos\theta} \mathrm{rdr}d\theta = ... = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - 1}}$$

Eller (2 ganger differens mellom ¼ sirkelareal og trekantareal innenfor sirkelsegment):

$$A = 2\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - 1}}$$

3. Tåkedråpe:

$$\vec{r}(t) = [2a\cos t - a\sin 2t, b\sin t] \qquad t \in [0, 2\pi]$$

a) Forklaring av konstantene *a* og *b*:
Vi ser av 2.komponenten at kurvens skjæringspunkt med *x*-aksen svarer til $t = 0$ (eller 2π).
Vi ser av 2.komponenten at kurvens høyeste punkt svarer til $t = \pi/2$.

Ved å sette $t = 0$, får vi:

$$\vec{r}(0) = [2a\cos 0 - a\sin 2\cdot 0, b\sin 0] = [2\text{a}, 0]$$

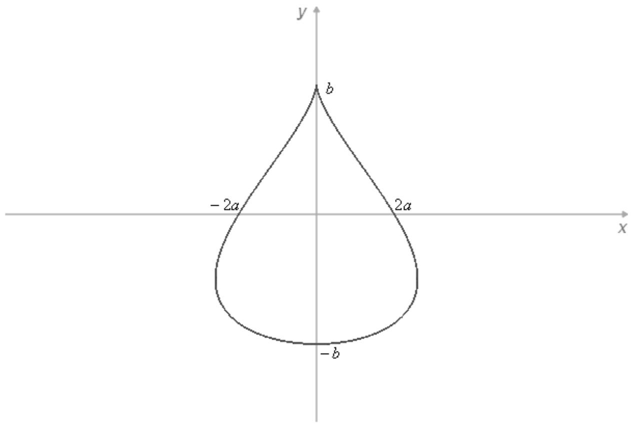
a er altså halve avstanden fra origo ut til dråpens skjæringspunkt med *x*-aken.

Ved å sette t = $\pi/2$, får vi:

$$\vec{r}(\frac{\pi}{2}) = [2a\cos\frac{\pi}{2} - a\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}, b\sin\frac{\pi}{2}] = [0, \text{b}]$$

b er altså avstanden fra origo opp til dråpens skjæringspunkt med *y*-aksen.
Tilsvarende får vi også skjæring med *x*- og *y*-aksen i henholdsvis (-2*a*,0) og (0,-*b*).

Merk: Dette betyr *ikke* nødvendigvis at *t* er vinkelen mellom *r*-vektor og *x*-aksen.



b) Areal av tåredråpen:

$$\vec{r}(t) = [2a\cos t - a\sin 2t, b\sin t] \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$d\vec{r}(t) = [-2a\sin t - 2a\cos 2t, b\cos t]dt$$

$$A = \iint_R dA = \oint_C x\,dy = \int_{t=0}^{t=2\pi} (2a\cos t - a\sin 2t) b\cos t\,dt$$

$$= ab\int_{t=0}^{t=2\pi} (2\cos^2 t - \sin 2t\cos t)dt$$

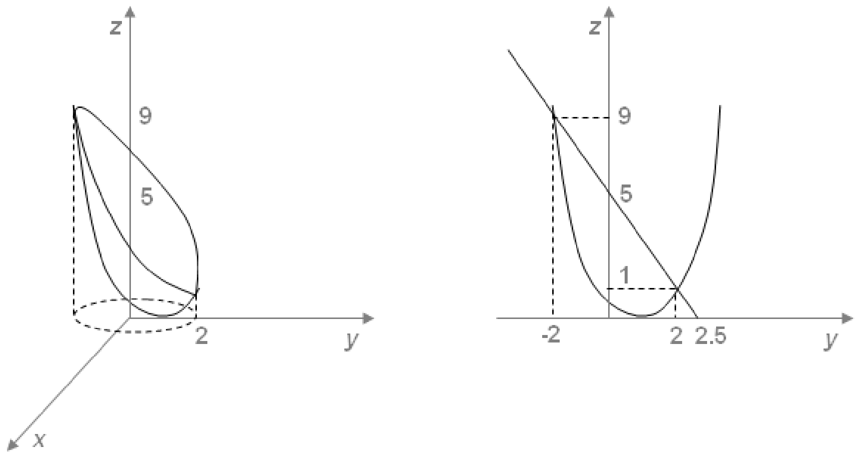
$$= ab\int_{t=0}^{t=2\pi} (1 + \cos 2t - 2\sin t\cos^2 t)dt$$

$$= ab\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{2}{3}\cos^3 t\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \underline{\underline{2\pi ab}}$$

4. a) Flaten S_1 er en sirkulær paraboloideflate med bunnpunkt i punktet (0,1,0) og med linjen normalt på xy-planet gjennom punktet (0,1,0) som senterakse.

Flaten S_2 er et plan parallelt med x-aksen.
Planet skjærer y-aksen i punktet (0,5/2,0) og z-aksen i punktet (0,0,5).

En skisse av legemet T som avgrenses av de to flatene S_1 og S_2:



b) Projeksjonen av skjæringskurven C ned i xy-planet:

$$z = x^2 + (y-1)^2$$
$$z = 5 - 2y$$
$$\Downarrow$$
$$x^2 + (y-1)^2 = 5 - 2y$$
$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 5 - 2y$$
$$\underline{\underline{x^2 + y^2 = 2^2}}$$

Herav følger at projeksjonen av skjæringskurven C ned i xy-planet er en sirkel med sentrum i origo og radius 2.

c) Parameterisering av kurven C:

De to første komponentene (x og y) er bestemt ut fra at projeksjonen av kurven C ned i xy-planet er en sirkel med sentrum i origo og radius 2 ($x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$).
Den tredje komponentene (z) kan vi besteme ut fra uttrykket til en av de to gitte flatene.
Vi velger flaten S_2 siden den har enklest uttrykk. Vi får:

$z = 5 - 2y = 5 - 2\cdot 2\sin t = 5 - 4\sin t$.

$$\vec{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t, 5 - 2\cdot(2\sin t)] = \underline{\underline{[2\cos t, 2\sin t, 5 - 4\sin t]}} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

d) Volum av legemet *T*:

$$V = \iiint_T dV = \iint \int_{z=x^2+(y-1)^2}^{z=5-2y} dz\, dA$$
$$= \iint_R [z]_{z=x^2+(y-1)^2}^{z=5-2y} dA$$
$$= \iint_R \left[4-(x^2+y^2)\right] dA$$
$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=2} (4-r^2) r dr d\theta$$
$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=2} (4r-r^3) dr d\theta$$
$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[2r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=2} d\theta = 4\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = 4\cdot 2\pi = \underline{\underline{8\pi}}$$

e) Divergens og curl til vektorfeltet:

$$\vec{F} = [0, 3y, 2x]$$

$$div\, \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot [0, 3y, 2x] = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(3y) + \frac{\partial}{\partial z}(2x) = 0+3+0 = \underline{\underline{3}}$$

$$curl\, \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 3y & 2x \end{vmatrix}$$
$$= [\frac{\partial}{\partial y}(2x) - \frac{\partial}{\partial z}(3y), \frac{\partial}{\partial z}(0) - \frac{\partial}{\partial x}(2x), \frac{\partial}{\partial x}(3y) - \frac{\partial}{\partial y}(0)] = \underline{\underline{[0,-2,0]}}$$

f) Kurve-integral ved direkte beregning (uten bruk av Stokes teorem):

$$\vec{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t, 5-4\sin t]$$
$$d\vec{r} = [-2\sin t, 2\cos t, -4\cos t]dt$$
$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = [0, 3\cdot 2\sin t, 2\cdot 2\cos t] = [0, 6\sin t, 4\cos t]$$
$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = [0, 6\sin t, 4\cos t]\cdot[-2\sin t, 2\cos t, -4\cos t]dt = \underline{(12\sin t\cos t - 16\cos^2 t)dt}$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C (12\sin t\cos t - 16\cos^2 t)dt$$
$$= \oint_C (6\sin 2t - 16\cdot\frac{1+\cos 2t}{2})dt$$
$$= \oint_C (6\sin 2t - 8 - 8\cos 2t)dt = \left[-3\cos 2t - 8t - 4\sin 2t\right]_{t=}^{t=2\pi} = -8\cdot 2\pi = \underline{\underline{-16\pi}}$$

g) Kurve-integralet vha Stokes teorem:

Som flate i Stokes teorem velger vi den delen av flaten $z = 5 - 2y$ som ligger innenfor kurven C siden denne delen av flaten har kurven C som rand.

Lager følgende skalare funksjon:

$$f(x, y, z) = z + 2y$$

Flaten S_2 er da gitt ved f(x,y,z) = 5, dvs flaten S_2 er en nivåflate til den skalare funksjonen *f*. Gradienten til f står da normalt på flaten S_2.

$$\text{grad } f = \nabla f = [\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}] f = [\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}] = \underline{[0, 2, 1]}$$

Lengden av gradienten til *f* er gitt ved:

$$|\nabla f| = |[0,2,1]| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \underline{\sqrt{5}}$$

Enhetsnormalen til flaten S_2 er da gitt ved:

$$\vec{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \underline{\frac{[0, 2, 1]}{\sqrt{5}}}$$

Kurve-integralet er nå gitt ved:

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS \\
&= \iint_R (\nabla \times \vec{F}) \cdot \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA \\
&= \iint_R [0,-2,0] \cdot \frac{[0,2,1]}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{|[0,2,1] \cdot [0,0,1]|} dA \\
&= -4 \iint_R dA = -4 \cdot \pi \cdot 2^2 = \underline{\underline{-16\pi}}
\end{aligned}$$

Resultatet stemmer overens med resultatet fra oppgave f).

h) Netto fluks Φ av vektorfeltet ut av det lukkede legemet T:

$$\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot n dS = \iiint_T \nabla \cdot \vec{F} dV = \iiint_T 3 dV = 3\iiint_T dV = 3V = 3 \cdot 8\pi = \underline{\underline{24\pi}}$$

i) Netto fluks Φ_2 ut av flaten S_2:

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_R [0, 3y, 2x] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} [0, 2, 1] \frac{\sqrt{5}}{\left| [0, 2, 1] \cdot [0, 0, 1] \right|} dA$$

$$= \iint_R (6y + 2x) dA = \underline{\underline{0}} \qquad \text{(Symmetri - grunner)}$$

Netto fluks Φ_1 ut av flaten S_1:

Vi benytter at den totale fluksen ut av legemet T er lik summen av fluksen ut av hver av de to enkelt-flatene S_1 og S_2.

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi_1 = \Phi - \Phi_2 = 24\pi - 0 = \underline{\underline{24\pi}}$$

Merk at vi *ikke* kan benytte Gauss' divergensteorem til beregning av fluksen gjennom hver at de to enkelt-flatene S_1 og S_2 siden ingen av disse flatene er lukket i rommet.

5.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Downarrow$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot dr \cdot = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n} dS = \iint_S (-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \cdot \vec{n} dS = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = -\frac{\partial}{\partial t} [\Phi_B]$$

Herav ser vi at den elektromotoriske spenningen i sløyfen (venste siden i ligningen)
er lik minus den tidsderiverte av fluksen Φ av det magnetiske feltet gjennom flaten S
som har kurven C som rand.
Det betyr at hvis vi endrer den magnetiske fluksen gjennom den flaten som har C som rand
(dvs høyre siden i ligningen ovenfor er ulik null)
så vil det gå strøm i denne sløyfen (forutsatt at sløyfen kan lede strøm)
siden venstre siden i ligningen ovenfor også da må være ulik null.

Merk at vi *ikke* får en elektromotorisk spenning i sløyfen hvis den magnetiske fluksen
er konstant siden den partiell-deriverte av fluksen mht tiden t da vil være lik null.
Den magnetiske fluksen kan vi endre ved å endre magnetfeltet og/eller ved å endre sløyfen
(den sistnevnte endringen vil endre flaten S og dermed den magnetiske fluksen).

I praksis kan vi endre en slik fluks ved å flytte en magnet i nærheten av sløyfen (se fig 5.1)
eller ved å endre sløyfen (f.eks. ved å flytte, vri eller deformere den).

Minustegnet på høyresiden i ligningen ovenfor viser at strømmen vil gå i en slik retning
i sløyfen at strømmen selv setter opp en magnetisk fluks som forsøker å hindre endringen
i den påtrykte magnetiske fluksen (Lenz's lov).

Merk også at implikasjonstegnet mellom linje 1 og linje 2 i beregningene ovenfor
kan erstattes av et ekvivalenstegn siden ligningen i linje 2 skal gjelde for *alle* enkle flater S
som har den lukkede kurven C som rand.

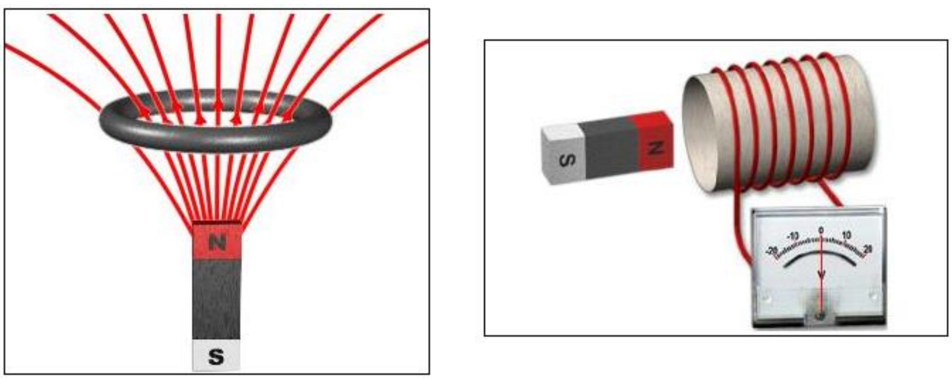


Fig 5.1