UNIVERSITETET I AGDER
Grimstad

E K S A M E N S O P P G A V E :

FAG: MA-209 Matematikk 3 **LÆRER: Per Henrik Hogstad**

Klasse(r):	**Dato: 28.02.17**	**Eksamenstid, fra-til: 09.00 – 14.00**	
Eksamensoppgaven består av følgende	**Antall sider: 6 (inkl. forside + vedlegg)**	**Antall oppgaver: 4**	**Antall vedlegg: 1**
Tillatte hjelpemidler er:	**Kalkulator** **Hogstad: Formler MA-209** **Don’t Panic** **Rottmann: Matematisk formelsamling** **(Ikke tillatt å skrive i formelsamlingene)**		
KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG			

MA-209 Utsatt Eksamen

Oppg nr		Poeng
1	a	3
	b	3
2	a	3
	b	3
3	a	3
	b	3
4	a	3
	b	3
	c	3
	d	3
	e	3
	f	3
	g	3
	h	3
	i	3
	j	3
	k	3
Sum		51

Poengene viser vektfordelingen for de enkelte delspørsmålene.
Ved karaktersetting vektlegges selvfølgelig i tillegg en totalvurdering, bl.a. en vurdering av i hvilken grad kandidaten har kunnskaper innenfor de ulike områdene gitt i oppgavesettet.

Besvarelsen skal inneholde mellomregninger.
Kalkulator skal *ikke* benyttes i beregningene, kun til eventuell kontroll av egne svar.
Ta egne forutsetninger hvis du finner uklarheter i oppgavesettet.

LYKKE TIL !

1. Vi har et område (en tynn plate) R avgrenset av de tre kurvene (se fig 1.1):

$$y = \sqrt{x}$$
$$y = 0$$
$$x = 1$$

Massetettheten ρ (antall kg pr kvadratmeter) av området (platen) R er gitt ved:

$$\rho = x$$

a) Bestem massen M av området R.

b) Bestem massesenteret (x_{cm}, y_{cm}) av området R.

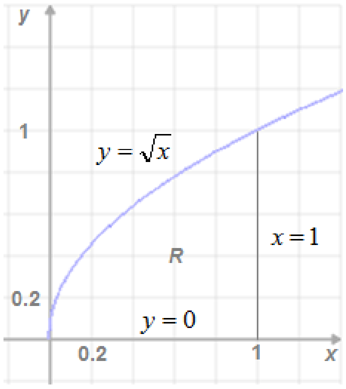


Fig 1.1

2. Vi har gitt følgende dobbelt-integral:

$$I = \int_{y=0}^{y=2} \int_{x=\frac{y}{2}}^{x=\frac{y+4}{2}} y^3 (2x - y) e^{(2x-y)^2} \, dxdy$$

Dobbelt-integralet I skal beregnes ved hjelp av følgende substitusjon:

$$x = u + \frac{v}{2}$$
$$y = v$$

a) Tegn to figurer som viser henholdsvis integrasjonsområdet R i xy-planet og integrasjonsområdet G i uv-planet.

b) Beregn dobbelt-integralet I ved hjelp av den gitte substitusjonen.

3. Vi har gitt følgende spiral-kurve i rommet (se fig 3.1):

$$\vec{r}(t) = [a\cos t, a\sin t, bt] \qquad t \in [0, 4\pi] \qquad a, b \text{ positive konstanter}$$

Videre har vi gitt følgende tyngdefelt (kraftvektor eller tyngdekraft):

$$\vec{F} = [0, 0, -mg]$$

hvor m er massen til en partikkel som befinner seg i tyngdefeltet og g er tyngdeakselerasjonen.

a) Vis at tyngdefeltet representert ved F-vektor er et konservativt vektorfelt, og finn en potensialfunksjon til F-vektor.

b) Bruk resultatet fra a) til å beregne det arbeidet, dvs beregn integralet:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

som tyngdekraften utfører på denne partikkelen med masse m
når partikkelen beveger seg langs spiralkurven gitt ovenfor, men i motsatt retning,
fra punktet på toppen gitt ved parameterverdien $t = 4\pi$
til punktet i bunnen gitt ved parameterverdien $t = 0$, dvs fra punktet A til punktet B vist i fig 3.1.

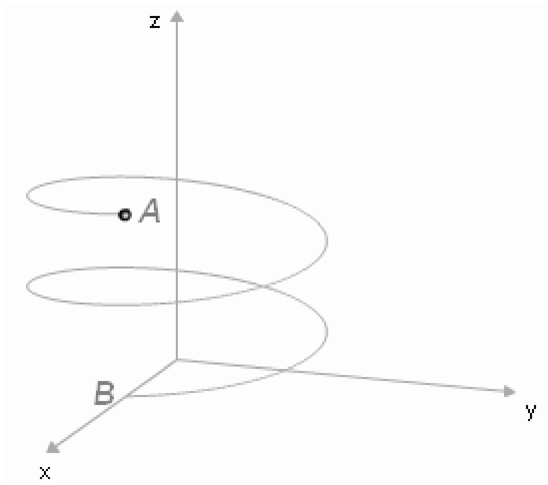


Fig 3.1

4. Vi har gitt følgende to flater i rommet:

S_1: $y = x^2 + (z-2)^2$

S_2: $y = 8 - 4z$

Videre har vi gitt følgende vektorfelt:

$$\vec{F} = [5y, 0, 2z]$$

a) Forklar hva slags flater S_1 og S_2 er.
Tegn det legemet T som er avgrenset av de to flatene S_1 og S_2.
Hint: Til hjelp med tegning av legemet T, tegn en (eller flere) hjelpefigur(er) som viser f.eks. flatenes skjæringskurver med yz-planet.

b) Vis at projeksjonen inn i xz-planet av skjæringskurven C mellom de to flatene S_1 og S_2 er en sirkel med sentrum i origo og radius 2.

c) Bestem en parameterisering av kurven C.
Kurven skal for økende parameterverdi gjennomløpes i retning mot klokka sett langs den positive y-aksen i retning mot origo.

d) Beregn ved hjelp av trippelintegral volumet av legemet T.

e) Bestem divergens og curl til det gitte vektorfeltet.

f) Bestem kurveintegralet:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ved direkte beregning, dvs uten bruk av Stokes teorem.

g) Bestem kurveintegralet i oppgave f) ved hjelp av Stokes teorem.

h) Bestem netto fluks av det gitte vektorfeltet ut av det lukkede legemet T.

i) Bestem netto fluks av det gitte vektorfeltet ut av hver av flatene S_1 og S_2 som avgrenser legemet T.

j) Vis at hvis et vektorfelt G har kontinuerlige første- og andre-partiellderiverte, så gjelder følgende relasjon:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{G}) = 0 \qquad \text{Divergens av curl er lik null}$$

k) Bestem netto fluks av curl til det gitte vektorfeltet gitt ved F-vektor ut av hver av de to flatene S_1 og S_2 .

Vedlegg:

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1$$
$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$$
$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$$
$$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$$
$$\sin 2u = 2 \sin u \cos u$$
$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$
$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$
$$(\cos u)' = -\sin u$$
$$(\sin u)' = \cos u$$
$$(\tan u)' = \frac{1}{\cos^2 u}$$
$$(\cosh u)' = \sinh u$$
$$(\sinh u)' = \cosh u$$
$$e^{\ln x} = x$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

∇f	normalvektor til en flate S som er en nivåflate til f
$\vec{n} = \dfrac{\nabla f}{\lvert \nabla f \rvert}$	enhetsnormalvektor til en flate S som er en nivåflate til f

Løsning:

1. a) Massen av området (platen) R:

$$M = \iint_R \mathrm{dm} = \iint_R \rho \mathrm{dA} = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} x\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1} \left[xy\right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_{x=0}^{x=1} x^{\frac{3}{2}} dx = \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}\right]_{x=0}^{x=1} = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}$$

b) Massesenteret av området R:

$$\bar{x} = x_{cm} = \frac{1}{M}\iint_R \mathrm{xdm} = \frac{1}{M}\iint_R x\rho \mathrm{dA}$$

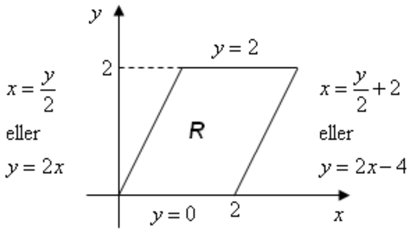
$$= \frac{1}{M}\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} x^2\,dy\,dx = \frac{1}{M}\int_{x=0}^{x=1}\left[\frac{1}{2}x^2 y\right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx = \frac{1}{M}\int_{x=0}^{x=1} x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{1}{M}\left[\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{\frac{2}{5}}\cdot\frac{2}{7} = \underline{\underline{\frac{5}{7}}}$$

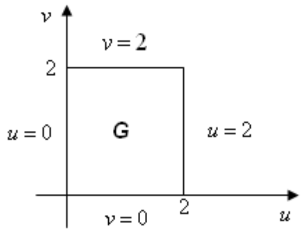
$$\bar{y} = y_{cm} = \frac{1}{M}\iint_R \mathrm{y\,dm} = \frac{1}{M}\iint_R y\rho \mathrm{dA}$$

$$= \frac{1}{M}\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} xy\,dy\,dx = \frac{1}{M}\int_{x=0}^{x=1}\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx = \frac{1}{M}\int_{x=0}^{x=1}\frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{M}\left[\frac{1}{6}x^3\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{\frac{2}{5}}\cdot\frac{1}{6} = \underline{\underline{\frac{5}{12}}}$$

2. a) Integrasjonsområdene R (i xy-planet) og G (i uv-planet):

$$x = u + \frac{v}{2}$$
$$y = v$$





Kurvene i uv-planet bestemmes på følgende måte:

$$x = \frac{y}{2} \quad \Rightarrow \quad u + \frac{v}{2} = \frac{v}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{u = 0}$$
$$x = \frac{y+4}{2} \quad \Rightarrow \quad u + \frac{v}{2} = \frac{v+4}{2} \quad \Rightarrow \quad u + \frac{v}{2} = \frac{v}{2} + 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{u = 2}$$
$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{v = 0}$$
$$y = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{v = 2}$$

Området R i xy-planet er et parallellogram.
Området G i uv-planet er et kvadrat.

b) Jacobideterminant:

$$J_{\vec{r}}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 = \underline{1}$$

$$I = \int_{y=0}^{y=2} \int_{x=\frac{y}{2}}^{x=\frac{y+4}{2}} \mathrm{y}^3 (2x-y) e^{(2x-y)^2} \, dxdy = \int_{v=0}^{v=2} \int_{u=0}^{u=2} \mathrm{v}^3 (2(u+\frac{v}{2}) - v) e^{4u^2} \, |1| dudv$$

$$= \int_{v=0}^{v=2} \int_{u=0}^{u=2} \mathrm{v}^3 (2u) e^{4u^2} \, dudv = \int_{v=0}^{v=2} v^3 \left[\frac{1}{4} e^{4u^2} \right]_{u=0}^{u=2} dv = \int_{v=0}^{v=2} v^3 \left[\frac{1}{4} e^{4 \cdot 2^2} - \frac{1}{4} e^{4 \cdot 0^2} \right]_{u=0}^{u=2} dv$$

$$= \frac{1}{4}(e^{16} - 1) \int_{v=0}^{v=2} v^3 dv == \frac{1}{4}(e^{16} - 1) \left[\frac{1}{4} v^4 \right]_{v=0}^{v=2} = \frac{1}{4}(e^{16} - 1) \cdot \frac{1}{4} 2^4 = \underline{\underline{e^{16} - 1}}$$

3. a) Vi beregner curl til *F*-vektor:

$$curl\ \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix}$$

$$= [\frac{\partial}{\partial y}(-mg) - \frac{\partial}{\partial z}(0), \frac{\partial}{\partial z}(0) - \frac{\partial}{\partial x}(-mg), \frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial y}(0)] = [0,0,0] = \underline{\vec{0}}$$

Kan også se at curl *F* er lik nullvektor siden kompentene i *F*-vektor kun er konstanter.
Siden curl *F* = nullvektor, så er *F* en konservativ kraft (vektorfeltet et konservativt vektorfelt).
Dermed så finnes en potensialfunskjon *f* som er slik at gradienten til f er lik *F*-vektor.

Bestemmelse av en potensialfunksjon:

$$\vec{F} = [0,0,-mg]$$

$$\vec{F} = \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{f(x,y,z) = g(y,z)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(g(y,z)) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad g(y,z) = h(z) \quad \Rightarrow \quad \underline{f(x,y,z) = h(z)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(h(z)) \overset{!}{=} -mg \quad \Rightarrow \quad \underline{h(z) = -mgz + C} \quad \Rightarrow \quad \underline{f(x,y,z) = -mgz + C}$$

$$\underline{\underline{f(x,y,z) = -mgz + C}}$$

eller enklere (som erstatning for alle beregningene ovenfor):

$$\left.\begin{matrix} \vec{F} = [0,0,-mg] \\ \vec{F} = \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right] \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = \text{-mg} \Rightarrow \underline{\underline{f(x,y,z = -mgz + C}} \text{ eller } \vec{F} = \nabla(-mgz + C)$$

b) Arbeidet beregnet av tyngden ved partikkel-bevegelse fra *A* til *B*:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (\nabla f) \cdot d\vec{r} = [f]_A^B$$

$$= f(B) - f(A)$$

$$= f(\vec{r}(0)) - f(\vec{r}(4\pi))$$

$$= f(a,0,b \cdot 0) - f(a,0,b \cdot 4\pi)$$

$$= f(a,0,0) - f(a,0,4\pi b)$$

$$= -mg \cdot 0 + C - (-mg \cdot 4\pi b + C)$$

$$= \underline{\underline{4\pi mgb}}$$

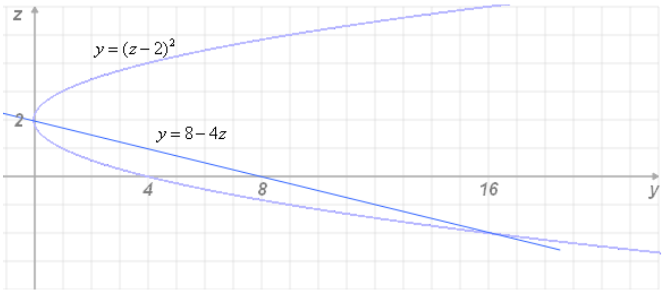
Arbeidet er altså lik tyngden *mg* av partikkelen
multiplisert med høydeforskjellen $4\pi b$ mellom punktene *A* og *B* (veiuavhenig).
Integralet kan også beregnes direkte uten bruk av potensialfunksjon (utenom oppgaven her).

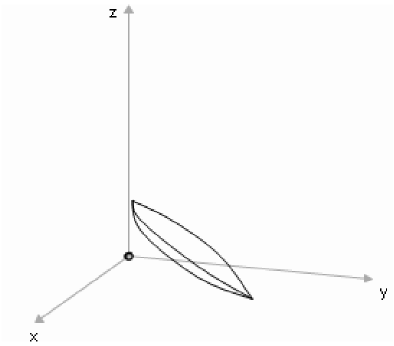
4. a) Forklaring og tegning av de to flatene S_1 og S_2 .

S_1: $y = x^2 + (z - 2)^2$

S_2: $y = 8 - 4z$

S_1 er en paraboloide med 'bunnpunkt' i (0,0,2) og symmetriakse parallell med *y*-aksen.
S_2 er et plan parallell med *x*-aksen
og skjæring med henholdsvis *y*-aksen og *z*-aksen i (0,8,0) og (0,0,2).





b) Ligningen for projeksjonen av kurven *C* inn i *xz*-planet:

$$x^2 + (z-2)^2 = 8 - 4z$$
$$x^2 + z^2 - 4z + 4 = 8 - 4z$$
$$\underline{\underline{x^2 + z^2 = 2^2}}$$

Projeksjonen av kurven *C* inn i *xz*-planet er altså en sirkel med sentrum i origo og radius 2.

c) Parameterisering av kurven *C*:

$$\vec{r}(t) = [2\cos t, 8 - 4\cdot(-2\sin t), -2\sin t]$$
$$= \underline{\underline{[2\cos t, 8 + 8\sin t, -2\sin t]}} \quad t \in [0, 2\pi]$$

d) Volum av legemet T:

$$V = \iiint_T dV = \iint_R \int_{y=x^2+(z-2)^2}^{y=8-4z} dy\ dA$$

$$= \iint_R \left[y\right]_{y=x^2+(z-2)^2}^{y=8-4z} dA$$

$$= \iint_R \left[8-4z-(x^2+z^2-4z+4)\right] dA$$

$$= \iint_R \left[4-(x^2+z^2)\right] dA$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=2} (4-r^2) r dr d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=2} (4r-r^3) dr d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[2r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=2} d\theta = 4\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = 4\cdot 2\pi = \underline{\underline{8\pi}}$$

e) Divergens og curl til vektorfeltet:

$$\vec{F} = [5y, 0, 2z]$$

$$div\ \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot [5y, 0, 2z] = \frac{\partial}{\partial x}(5y) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(2z) = 0+0+2 = \underline{\underline{2}}$$

$$curl\ \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 5y & 0 & 2z \end{vmatrix}$$

$$= [\frac{\partial}{\partial y}(2z) - \frac{\partial}{\partial z}(0), \frac{\partial}{\partial z}(5y) - \frac{\partial}{\partial x}(2z), \frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial y}(5y)] = \underline{\underline{[0,0,-5]}}$$

f) Kurve-integral ved direkte beregning (uten bruk av Stokes teorem):

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= [2\cos t, 8+8\sin t, -2\sin t] \\
d\vec{r} &= [-2\sin t, 8\cos t, -2\cos t]dt \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) &= [5\cdot(8+8\sin t, 0, 2\cdot(-2\sin t)] = [40+40\sin t, 0, -4\sin t] \\
\vec{F}\cdot d\vec{r} &= [40+40\sin t, 0, -4\sin t]\cdot[-2\sin t, 8\cos t, -2\cos t]dt \\
&= \underline{(-80\sin t - 80\sin^2 t + 8\sin t\cos t)dt}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \oint_C (-80\sin t - 80\sin^2 t + 8\sin t\cos t)dt \\
&= \oint_C (-80\sin t - 80\cdot\frac{1-\cos 2t}{2} + 4\sin 2t)dt \\
&= \oint_C (-80\sin t - 40 + 40\cos 2t + 4\sin 2t)dt \\
&= \left[80\cos t - 40t + 20\sin 2t - 2\cos 2t\right]_{t=0}^{t=2\pi} = -40\cdot 2\pi = \underline{\underline{-80\pi}}
\end{aligned}$$

g) Kurve-integralet vha Stokes teorem:

Som flate i Stokes teorem velger vi den delen av flaten $y = 8 - 4z$ som ligger innenfor kurven C siden denne delen av flaten har kurven C som rand.

Lager følgende skalare funksjon:

$$f(x,y,z) = y + 4z$$

Flaten S_2 er da gitt ved f(x,y,z) = 8, dvs flaten S_2 er en nivåflate til den skalare funksjonen *f*. Gradienten til f står da normalt på flaten S_2.

$$\text{grad } f = \nabla f = [\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}] f = [\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}] = \underline{[0,1,4]}$$

Lengden av gradienten til *f* er gitt ved:

$$|\nabla f| = |[0,1,4]| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 4^2} = \underline{\sqrt{17}}$$

Enhetsnormalen til flaten S_2 er da gitt ved:

$$\vec{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \underline{\frac{[0,1,4]}{\sqrt{17}}}$$

Kurve-integralet er nå gitt ved:

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS \\
&= \iint_R (\nabla \times \vec{F}) \cdot \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA \\
&= \iint_R [0,0,-5] \cdot \frac{[0,1,4]}{\sqrt{17}} \frac{\sqrt{17}}{|[0,1,4] \cdot [0,1,0]|} dA \\
&= -20 \iint_R dA = -20 \cdot \pi \cdot 2^2 = \underline{\underline{-80\pi}}
\end{aligned}$$

Merk at *p*-vektor er lik [0,1,0] siden vi har projeksjon inn i *xz*-planet.

Resultatet stemmer overens med resultatet fra oppgave f).

h) Netto fluks av det gitte vektorfeltet ut av det lukkede legemet *T*:

$$\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_T \nabla \cdot \vec{F} dV = \iiint_T 2dV = 2\iiint_T dV = 2 \cdot 8\pi = \underline{\underline{16\pi}}$$

i) Netto fluks av det gitte vektorfeltet ut av flaten S_2:

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_R [5y, 0, 2z] \cdot \frac{[0,1,4]}{\sqrt{17}} \frac{\sqrt{17}}{|[0,1,4] \cdot [0,1,0]|} dA$$

$$= 8 \iint_R z dA = \underline{\underline{0}}$$

Netto fluks av det gitte vektorfeltet ut av flaten S_1:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi_2 = \Phi - \Phi_1 = 16\pi - 0 = \underline{\underline{16\pi}}$$

j) Bevis for at divergens til curl er lik null:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{G}) = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G_3}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G_1}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G_2}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G_1}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 \partial G_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \partial G_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \partial G_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \partial G_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \partial G_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \partial G_1}{\partial z \partial y}$$

$$= \frac{\partial^2 \partial G_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \partial G_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \partial G_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \partial G_1}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \partial G_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \partial G_2}{\partial x \partial z}$$

$$= \frac{\partial^2 \partial G_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \partial G_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \partial G_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \partial G_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \partial G_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \partial G_2}{\partial z \partial x}$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

k) Nettofluks ut av flaten S_2 av curl til vektorfeltet F er pr def gitt ved:

$$\Phi_{Curl2} = \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS$$

Svaret på dette dobbelt-integralet har vi fra oppgave f).
Derfor får vi:

$$\Phi_{Curl2} = \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = \underline{\underline{-80\pi}}$$

Bruk av Gauss' divergensteorem gir oss følgende for nettofluks
ut av det lukkede legemet av curl til vektorfeltet F
(benytter resultatet fra oppgave 4j om at divergens til curl er lik null):

$$\Phi_{Curl} = \oiint_{S} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = \iiint_{T} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) dV = \iiint_{T} 0 dV = 0 \cdot \iiint_{T} dV = \underline{\underline{0}}$$

Herav får vi at netto fluks ut av flaten S_1 av curl til vektorfeltet F er gitt ved:

$$\Phi_{Curl} = \Phi_{Curl1} + \Phi_{Curl2}$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi_{Curl1} = \Phi_{Curl} - \Phi_{Curl2} = 0 - (-80\pi) = \underline{\underline{80\pi}}$$