UNIVERSITETET I AGDER
Grimstad

E K S A M E N S O P P G A V E :

FAG: MA-209 Matematikk 3 **LÆRERE: Per Henrik Hogstad**

Klasse(r):	**Dato: 19.05.09**	**Eksamenstid, fra-til: 09.00 – 14.00**	
Eksamensoppgaven består av følgende	**Antall sider: 4 (inkl. forside + vedlegg)**	**Antall oppgaver: 4**	**Antall vedlegg: 0**
Tillatte hjelpemidler er:	**Kalkulator** **Hogstad: Formler MA-209** **Haugan: Formler og tabeller (tillatt å skrive på de fem siste sidene)**		
KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG			

MA-209 Eksamen Vår 2009

Oppg nr		Poeng
1	a	3
	b	3
	c	3
	d	3
	e	3
	f	3
	g	3
	h	3
2		3
3		3
4	a	3
	b	3
Sum		36

Poengene viser vekt-fordelingen for de enkelte del-spørsmålene.
Ved karaktersetting vektlegges selvfølgelig i tillegg en total-vurdering, bl.a. en vurdering av i hvilken grad kandidaten har kunnskaper innenfor de ulike områdene gitt i oppgave-settet.

LYKKE TIL !

1. Vi har gitt følgende kurve, vektor-felt og legeme:

   Kurve C:

   $$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + (1+\sin(t))\vec{k} = [\cos(t), \sin(t), 1+\sin(t)] \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

   Vektor-felt $\vec{F}$:

   $$\vec{F}(x,y,z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + 2z\vec{k} = [-y, x, 2z]$$

   Legeme V begrenset av følgende tre flater:

   $$\begin{array}{ll} 3 - x^2 - y^2 - z = 0 & 2 \le z \le 3 \\ x^2 + y^2 = 1 & 0 \le z \le 2 \\ z = 0 & \end{array}$$

   a) Tegn en skisse av legemet V.
      Gi en kort forklaring av hva slags ulike flater dette legemet er begrenset av.

   b) Bestem hastighetsvektoren, akselerasjonsvektoren
      og enhetstangent-vektoren til kurven C i punktet (1,0,1). .

   c) Bestem hvorvidt kurven C ligger på overflaten til legemet V.

   d) Kurven C ligger i et plan parallell med x-aksen.
      Finn ligningen for dette planet.

   e) Beregn divergens ($div\vec{F}$) og curl ($curl\vec{F}$) til det gitte vektor-feltet.

   f) Beregn

      $$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

      direkte uten bruk av Stokes teorem.

   g) Kontroller svaret i f) vha Stokes teorem.

   h) La S være overflaten av V og **n** enhetesnormalen til S med retning utover.
      Beregn:

      $$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$

2. Beregn, vha trippel-integral, volumet av det legemet som er begrenset av (i tillegg til koordinat-planene xy-, xz- og yz-plan) følgende to plan:

$$2x + z = 2$$
$$y + 2z = 4$$

3. Løs følgende partielle differensial-ligning med de gitte tilleggs-betingelsene:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2xy^2$$
$$z(x,0) = x^2$$
$$z(0,y) = y$$

4. En kloss med masse $m = 1.0$ kg kan bevege seg friksjonsfritt på et horisontalt underlag.
Klossen er festet til den ene enden av en elastisk fjær med fjærkonstant $k = 2.0$ N/m.
Den andre enden av fjæren er festet til en vertikal vegg.
I tillegg til fjærkraften virker en ytre påtrykt kraft $F(t) = 10 \cdot t$ N på klossen.
t er her tiden målt i sekunder.
Det er ingen dempningskraft i dette svinge-systemet.

Newtons 2. lov gir nå følgende differensialligning til beskrivels av posisjonen $x = x(t)$ i denne svingebevegelsen:

$$x'' + 2x = 10 \cdot t$$

La oss nå anta at vi skal studere svingebevegelsen i løpet av det første sekundet, dvs tiden t skal ligge i det lukkede intervallet fra og med 0 sekund til og med 1 sekund.
Videre antar vi at svinge-bevegelsen er igangsatt på en slik måte at klossen passerer likevekt-stillingen (x=0) både ved tiden $t = 0$ s og ved tiden $t = 1$ s

Følgende differensialligning (med initial-betingelser) vil nå beskrive svinge-bevegelsen:

$$x'' + 2x = 10t \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$x(0) = 0 \qquad \text{Tilleggs – betingelser}$$
$$x(1) = 0$$

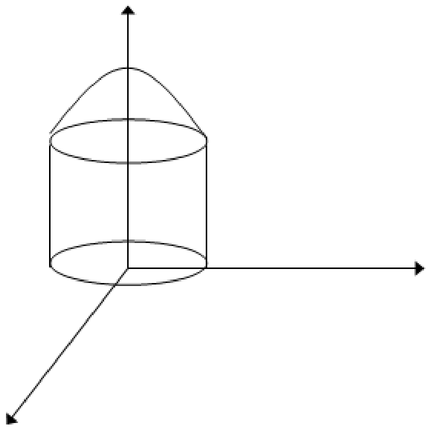
a) Finn den generelle, eksakte (analytiske) løsning til den gitte differensial-ligningen.
Hint: For å finne en partikulær løsning, prøv med $x_p(t) = C \cdot t$

b) Utvid den ytre kraften $F(t)$ til å bli en periodisk funksjon med passende periode $2L$ mht de gitte tilleggs-betingelsene, og utfør en Fourier sinus-utvikling av $F(t)$.
Det skal vises tydelig hvordan denne Fourier sinus-rekken fremkommer.
Bestem deretter løsning til differensialligningen (med de gitte tilleggs-betingelsene) ved å benytte den nevnte Fourier sinus-rekken.

.

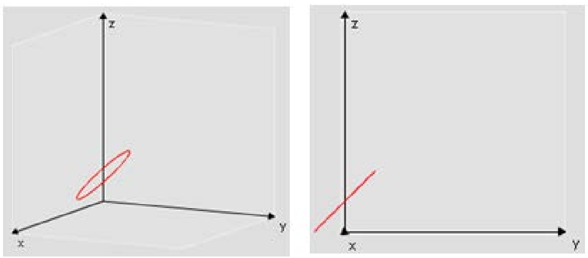
Løsning:

1. a)



$3-x^2-y^2-z=0$	$2\le z\le 3$	Paraboloide med topp - punkt i (0,0,3) og z - aksen som symmetri - akse
$x^2+y^2=1$	$0\le z\le 2$	Sylinder med radius 1 og z - aksen som senterakse. Sylinderen går fra z = 0 (xy - planet) opp til z = 2.
$z=0$		xy – planet

b) $\vec{r}(t)=[\cos(t),\sin(t),1+\sin(t)]$ $\qquad 0\le t\le 2\pi$



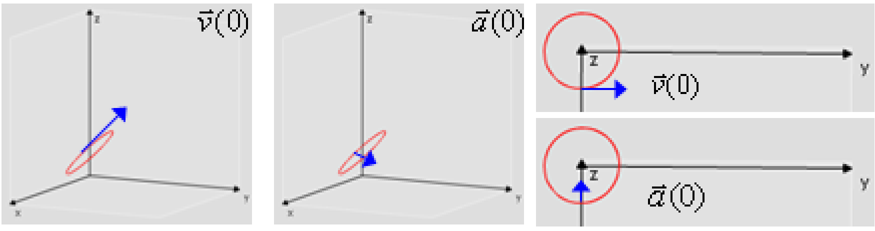
Punktet (1,0,1) på kurven C svarer til verdien t=0 (eller t = 2PI) i r-vektor.
Dette ser vi av x=cos(t)=1, y=sin(t)=0, z=1+sin(t)=1 med t i intervallet 0 til 2PI.

Hastighets-vektor:

$$\vec{v}(t)=\dot{\vec{r}}(t)=\underline{[-\sin(t),\cos(t),\cos(t)]}$$
$$\vec{v}(0)=[-\sin(0),\cos(0),\cos(0)]=\underline{\underline{[0,1,1]}}$$

Akselerasjons-vektor:

$$\vec{a}(t)=\dot{\vec{v}}(t)=\underline{[-\cos(t),-\sin(t),-\sin(t)]}$$
$$\vec{a}(0)=[-\cos(0),-\sin(0),-\sin(0)]=\underline{\underline{[-1,0,0]}}$$



Enhetstangent-vektor:

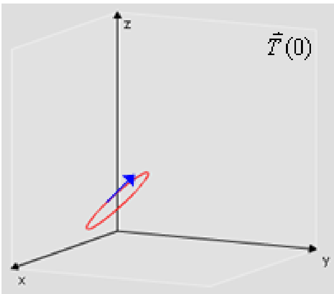
$$\vec{T}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{ds} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \vec{v}(t)\frac{1}{v} = \frac{1}{v}\vec{v}(t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{((-\sin(t))^2 + ((\cos(t))^2 + ((\cos(t))^2}}[-\sin(t), \cos(t), \cos(t)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + \cos^2(t)}}[-\sin(t), \cos(t), \cos(t)]$$

$$= \underline{\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2(t)}}[-\sin(t), \cos(t), \cos(t)]}$$

$$\vec{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2(0)}}[-\sin(0), \cos(0), \cos(0)] = \frac{1}{\sqrt{1+1}}[0,1,1] \;\; = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}[0,1,1]}}$$



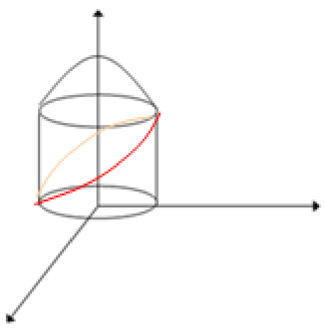
c) Fra posisjons-vektoren r-vektor får vi følgende:

$$x^2 + y^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

$$z_{\min} = 1 + (\sin(t))_{\min} = 1 + \sin(\frac{3}{2}\pi) = 1 - 1 = 0 \geq 0$$

$$z_{\max} = 1 + (\sin(t))_{\max} = 1 + \sin(\frac{1}{2}\pi) = 1 + 1 = 2 \leq 2$$

Dette viser at kurven C i sin helhet ligger på sylinder-delen av overflaten til V og derfor også på overflaten av V.
Kurven berører paraboloiden for t = 1/2PI og xy-planet (z=0) for t = 3/2PI.



d) Fra posisjons-vektoren r-vektor får vi følgende:

$$y = \sin(t)$$
$$z = 1 + \sin(t)$$
$$\Downarrow$$
$$\underline{\underline{z = 1 + y}}$$

Dette viser at kurven C i sin helhet ligger i planet z = 1 + y
(på formen ax + by + cz = d   med a=0, b=-1, c=1, d=1)
som er parallell med x-aksen (siden a=0, eller siden x ikke er med i uttrykket for planet, dvs x kan ha en vilkårlig verdi).

Eller:
Ethvert plan i rommet kan skrives på formen ax + by + cz = d.
Fra r-vektor får vi:

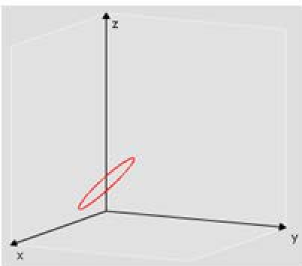
$$a \cdot \cos(t) + b \cdot \sin(t) + c \cdot (1 + \sin(t)) = d$$
$$a \cdot \cos(t) + (b + c) \cdot \sin(t) + c = d$$

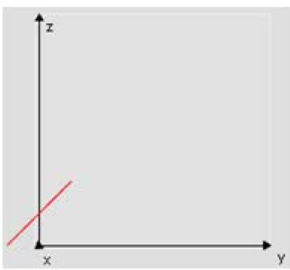
Kurven C vil nå ligge i et plan hvis vi kan vise at det finnes konstanter a, b, c og d (ikke alle a,b,c,d lik null) slik at den sistnevnte ligningen stemmer for alle t i det oppgitte lukkede intervallet fra 0 til 2PI.
Siden høyre-siden er en konstant, må koeffisienten a foran cos(t) og koeffisienten b+c foran sin(t) begge være null, samtidig som c må være lik d.

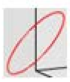
Vi får:

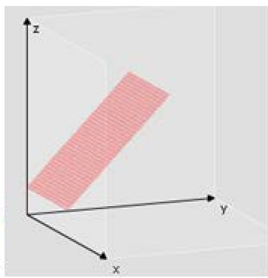
$$a = 0$$
$$b + c = 0$$
$$c = d$$
$$\Downarrow$$
$$a = 0$$
$$c = -b$$
$$d = -b$$
$$\Downarrow$$
$$0 \cdot x + b \cdot y - b \cdot z = -b$$
$$y - z = -1 \qquad (b \neq 0)$$
$$\underline{\underline{z = 1 + y}}$$

Dette viser at kurven C i sin helhet ligger i planet z = 1 + y
(på formen ax + by + cz = d   med a=0, b=-1, c=1, d=1)
som er parallell med x-aksen (siden a=0, eller siden x ikke er med i uttrykket for planet, dvs x kan ha en vilkårlig verdi).









e) $\vec{F}(x,y,z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + 2z\vec{k} = [-y, x, 2z]$

Divergens:

$$div\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot [-y, x, 2z] = \frac{\partial(-y)}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial(2z)}{\partial z} = 0 + 0 + 2 \cdot 1 = \underline{\underline{2}}$$

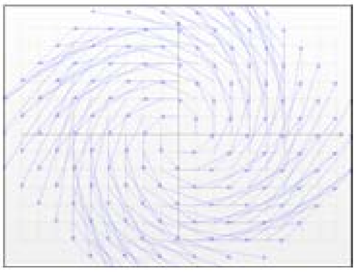
Med divergensen til F-vektor lik en positiv konstant,
vil det gitte vektor-feltet gi netto fluks ut overalt i rommet
(divergensen er lik netto fluks pr volum ut av et infinitesimalt volum-element).

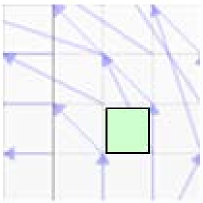
Curl:

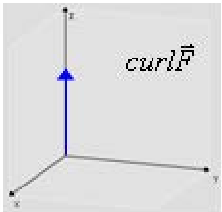
$$curl\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 2z \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial(2z)}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial(-y)}{\partial z} - \frac{\partial(2z)}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right] = [0-0, 0-0, 1-(-1)] = \underline{\underline{[0,0,2]}}$$

Med curl til F-vektor ulik null vil det gitte vektor-feltet inneholde rotasjons-tendens
i de retninger hvor curl F har en ikke-null-komponent
(curl er lik sirkulasjon pr areal over et sløyfe-element med infinitesimalt areal).

$\vec{F}(x,y,0)$



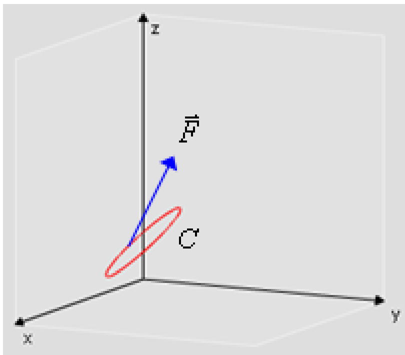


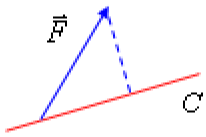


f) Direkte beregning av kurve-integralet uten bruk av Stokes teorem
(merk at siden curl F ikke er null-vektor (dermed er et kurve-integral av F-vektor ikke vei-uavhengig), kan vi ikke trekke slutning om at et lukket kurve-integral av F-vektor nødvendigvis er null):

Benytter den gitte parameteriseringen av kurven C:

$$
\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_C \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \\
&= \oint_C \vec{F} \cdot \vec{v} dt \\
&= \int_0^{2\pi} [-\sin(t), \cos(t), 2(1+\sin(t))] \cdot [-\sin(t), \cos(t), \cos(t)] dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t) + 2\cos(t) + 2\sin(t)\cos(t)) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos(t) + 2\sin(t)\cos(t)) dt \\
&= [t + 2\sin(t) + \sin^2(t)]_0^{2\pi} \\
&= \underline{\underline{2\pi}}
\end{aligned}
$$





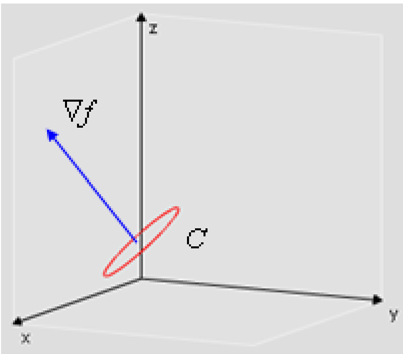
g) Bruk av Stokes teorem:

Ved bruk av Stokes teorem, må vi finne en flate som har kurven C som rand.
Siden vi i oppg d) viste at kurven C ligger i planet $z = 1 + y$,
kan vi benytte dette planet som den nevnte flaten.

Videre trenger vi en enhets-normalvektor til den nevnte flaten $z = 1 + y$.
Denne enhets-normalvektoren kan vi finne ved å bestemme en funksjon $f = f(x,y,z)$
som har flaten $z = 1 + y$ som nivåflate, dvs ligningen for flaten fremkommer
ved å sette f lik en eller annen konstant c, $f(x,y,z) = c$.
Gradienten til f vil da være en normal-vektor til den nevnte flaten $z = 1 + y$.

La $f(x,y,z) = z - 1 - y$
Flaten $z = 1 + y$ som kurven C ligger i er da gitt ved nivåflaten $f(x,y,z) = 0$.
En normal-vektor til denne flaten er da gitt ved:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right] = [0, -1, 1]$$



x-komponenten til denne gradient-vektoren er null, i samsvar med at
planet $z = 1 + y$ er parallell med x-aksen.
Siden y-komponenten av gradienten til f er negativ samtidig som z-komponenten er positiv,
vil denne normalvektoren (gradienten til f) peke ut av den delen av planet $z = 1 + y$
som sees når vi er plassert over flaten på z-aksen og ser nedover langs z-aksen
(i negativ z-akse retning).
Når vi beveger oss på flaten $z = 1 + y$ langs randen, tett inntil kurven C i positiv retning
(økende t-verdi), vil vi ha kurven C på vår høyre hånd, samtidig som vi vil ha
den tidligere nevnte oppovervendte delen av flaten $z = 1 + y$ på vår venstre hånd.
Den tidligere nevnte normal-vektoren (gradienten til f) til denne flaten
peker derfor ut av den positive siden av flaten $z = 1 + y$.

Med positiv omløpsretning av kurven C (slik som vi har beregnet kurveintegralet i f),
peker denne norml-vektoren (gradienten til f) ut av den positive siden av flaten $z = 1 + y$,
og vi kan benytte denne normal-vektoren (etter at den er justert til lengde 1,
dvs enhets-normalvektor) i Stokes teorem.

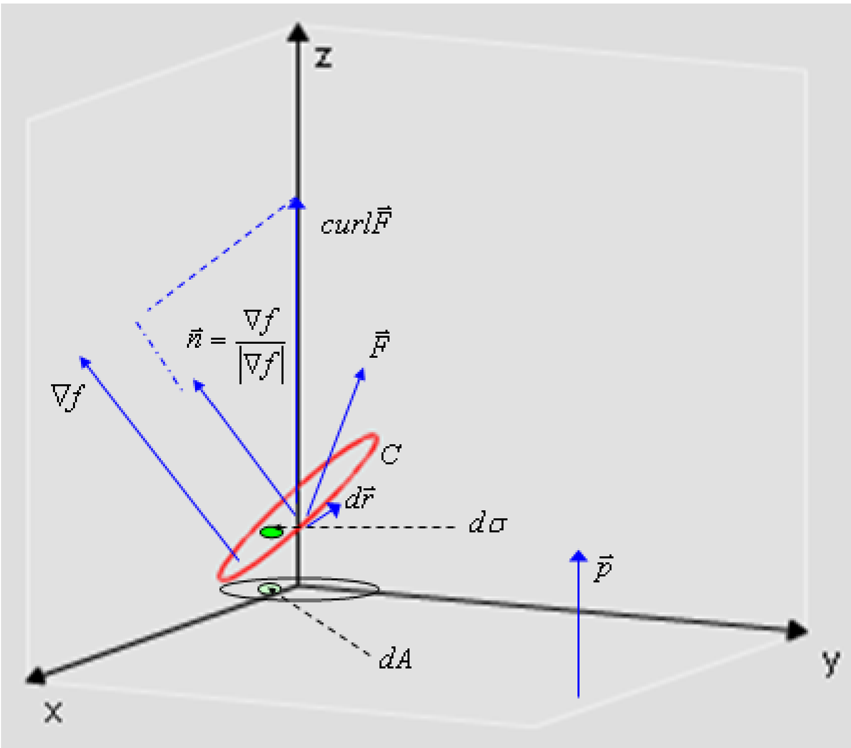
Til beregning av enhets-normalvektoren trenger vi videre lengden av den nevnte normalvektoren:

$$|\nabla f| = |[0,-1,1]| = \sqrt{0^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$$

Herav får vi følgende sirkulasjon (med bruk av Stokes teorem):

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \iint_S (curl\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS \\
&= \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS \\
&= \iint_A (\nabla\times\vec{F})\cdot\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot\vec{p}|}dA \\
&= \iint_A [0,0,2]\cdot\frac{[0,-1,1]}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{|[0,-1,1]\cdot[0,0,1]|}dA \\
&= \iint_A 2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{1}dA \\
&= 2\iint_A dA \\
&= 2\cdot\pi\cdot 1^2 \\
&= \underline{\underline{2\pi}}
\end{aligned}$$

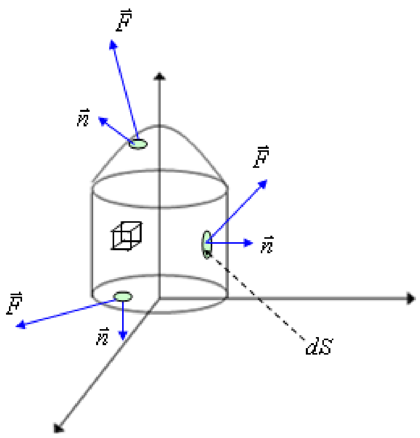
Stemmer overens med svaret fra oppg 1f.



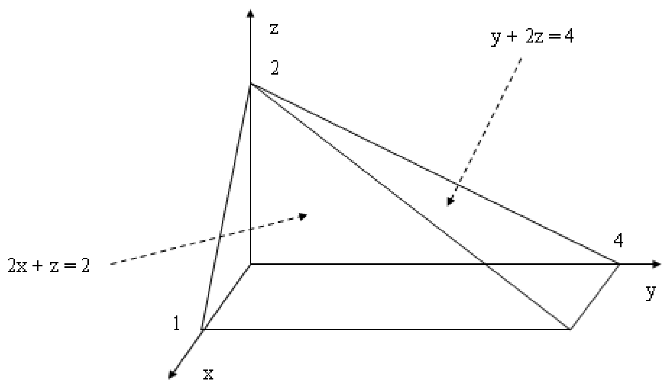
h) Oppgaven går ut på å bestemme netto fluks av vektorfeltet F ut av den lukkede overflaten S til legemet V. Siden denne flaten S består av 3 ulike flater (plan flate i xy-planet (bunnen), sylinderflaten (sideflaten) og paraboloideflaten (toppen)), kan det være hensiktsmessig å benyttes Gauss' teorem til bestemmelse av denne fluksen (spesielt fordi divergensen til F i oppg e) ble beregnet til å være relativt enkel). Gauss' teorem sier at vi ved netto fluks beregning over en lukket flate S, i stedet kan beregne volumintegralet av divergensen til F over det legemet V som har flaten S som sin overflate. Dette er mulig siden nettofluks over indre deler av V kanselleres til null (divergensen til F er nettofluks pr volumenhet).

Benytter Gauss' teorem:

$$
\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS &= \iiint_V div\vec{F}dV \\
&= \iiint_V 2dV \\
&= 2\iiint_V dV \\
&= 2\iint_A \int_{z=0}^{3-x^2-y^2} dzdA \\
&= 2\iint_A [z]_{z=0}^{3-x^2-y^2} dA \\
&= 2\iint_A (3-x^2-y^2)dA \\
&= 2\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=1}(3-r^2)rdrd\theta \\
&= 2\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=1}(3r-r^3)drd\theta \\
&= 2\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left[\frac{3}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=1}d\theta \\
&= 2\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\frac{5}{4}d\theta \\
&= \frac{5}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta \\
&= \frac{5}{2}\cdot 2\pi \\
&= \underline{\underline{5\pi}}
\end{aligned}
$$



2.

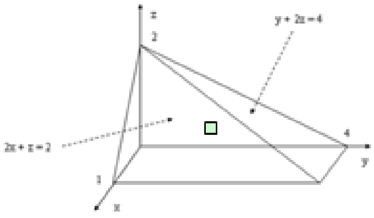


.

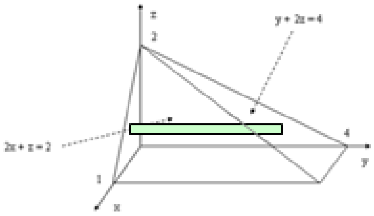
Volumet V er gitt ved (med to ulike 'tak' er det hensiktsmessig *ikke* å integrere mht z først):

$$V = \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_{y=0}^{4-2z} dydzdx$$
$$= \int_0^1 \int_0^{2-2x} [y]_{y=0}^{y=4-2z} dxdx$$
$$= \int_0^1 \int_0^{2-2x} [4 - 2z - 0]dzdx$$
$$= \int_0^1 \int_0^{2-2x} [4 - 2z]dzdx$$
$$= \int_0^1 \left[4z - z^2\right]_{z=0}^{z=2-2x} dx$$
$$= \int_0^1 \left[4(2-2x) - (2-2x)^2 - 4\cdot 0 - 0^2\right]dx$$
$$= \int_0^1 \left[4(2-2x) - (2-2x)^2\right]dx$$
$$= \int_0^1 \left[8 - 8x - (4 - 8x + 4x^2)\right]dx$$
$$= \int_0^1 \left[8 - 8x - 4 + 8x - 4x^2\right]dx$$
$$= \int_0^1 \left[4 - 4x^2\right]dx$$
$$= 4\int_0^1 \left[1 - x^2\right]dx$$
$$= 4\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1}$$
$$= 4\left[(1 - \frac{1}{3}\cdot 1^3) - (0 - \frac{1}{3}\cdot 0^3)\right]$$
$$= 4\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$
$$= 4\cdot\frac{2}{3}$$
$$= \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$$

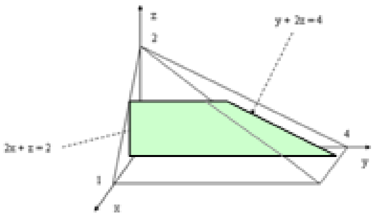
Stemmer overrens med volum av pyramide V = 1/3*G*h = 1/3*1*4*2 = 8/3



$$V = \int_{x=0}^{x=1} \int_{z=0}^{z=2-2x} \int_{y=0}^{y=4-2z} \boxed{dydzdx}$$



$$V = \int_{x=0}^{x=1} \int_{z=0}^{z=2-2x} \int_{\boxed{y=0}}^{\boxed{y=4-2z}} \boxed{dy}dzdx$$



$$V = \int_{x=0}^{x=1} \int_{\boxed{z=0}}^{\boxed{z=2-2x}} \int_{y=0}^{y=4-2z} dy\boxed{dz}dx$$

Ulike hensiktsmessige integrasjons-rekkefølger:

$$V = \int_{x=0}^{x=1} \int_{z=0}^{z=2-2x} \int_{y=0}^{y=4-2z} dydzdx$$

$$V = \int_{y=0}^{y=4} \int_{z=0}^{z=2-\frac{1}{2}y} \int_{x=0}^{x=1-\frac{1}{2}z} dxdzdy$$

$$V = \int_{z=0}^{z=2} \int_{x=0}^{x=1-\frac{1}{2}z} \int_{y=0}^{y=4-2z} dydxdz$$

$$V = \int_{z=0}^{z=2} \int_{y=0}^{y=4-2z} \int_{x=0}^{x=1-\frac{1}{2}z} dxdydz$$

3.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2xy^2$$
$$z(x,0) = x^2$$
$$z(0,y) = y$$

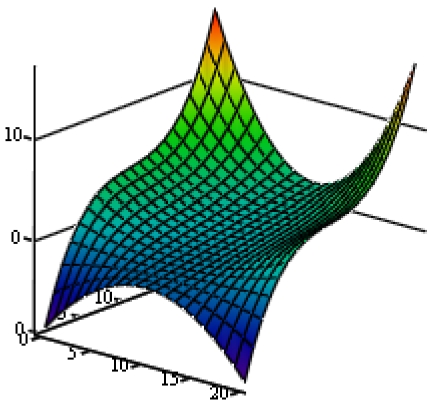
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2xy^2$$
$$\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx = \int 2xy^2 dx$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y^2 + F(y)$$
$$\int \frac{\partial z}{\partial y} dy = \int (x^2 y^2 + F(y)) dy$$
$$z(x,y) = \frac{1}{3}x^2 y^3 + \int F(y)dy + G(x) = \underline{\frac{1}{3}x^2 y^3 + H(y) + G(x)}$$

Dette er den generelle løsningen (inneholder to vilkårlige, uavhengige funksjoner (her kalt G(x) og H(y)) av den gitte partielle differensial-ligningen (uten tilleggs-betingelser).

Med tilleggs-betingelsene får vi videre:

$$z(x,y) = \frac{1}{3}x^2 y^3 + \int F(y)dy + G(x) = \underline{\frac{1}{3}x^2 y^3 + H(y) + G(x)}$$

$$z(x,0) = x^2 \Rightarrow G(x) = x^2 - H(0)$$
$$z(x,y) = \frac{1}{3}x^2 y^3 + H(y) + x^2 - H(0)$$
$$z(0,y) = y \Rightarrow H(y) = y + H(0)$$
$$\underline{\underline{z(x,y) = \frac{1}{3}x^2 y^3 + y + x^2}}$$



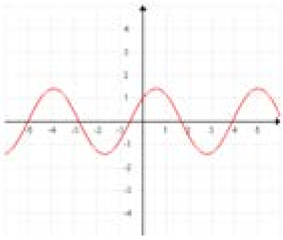
4. a) Den generelle løsning av den tilhørende homogene differensialligning

x'' + 2x = 0

er gitt ved:

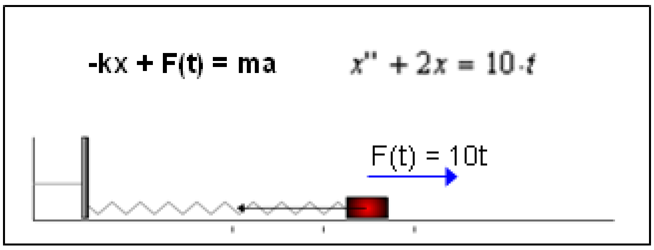
$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{1}} = \sqrt{2}$$

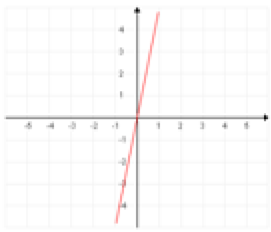
$$x(t) = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \sin(\sqrt{2}t)$$



En partikulær løsning av den gitte inhomogene ligning er gitt ved:

$$\begin{aligned} &x_p(t) = Ct \\ &\Downarrow \\ &x_p'(t) = C \\ &x_p''(t) = 0 \\ &\Downarrow \\ &0 + 2 \cdot Ct = 10t \\ &C = 5 \end{aligned}$$





Den generelle (eksakte, analytiske) løsning av den opprinnelige inhomogene differensialligning er derfor gitt ved:

$$x(t) = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \sin(\sqrt{2}t) + 5t$$

Med initial-betingelsene får vi:

$$x(0) = 0 = c_1 \cos(\sqrt{2} \cdot 0) + c_2 \sin(\sqrt{2} \cdot 0) + 5 \cdot 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

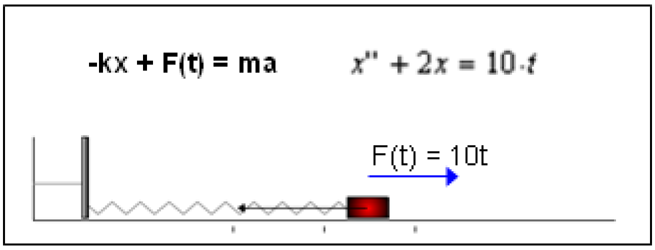
$$\Downarrow$$

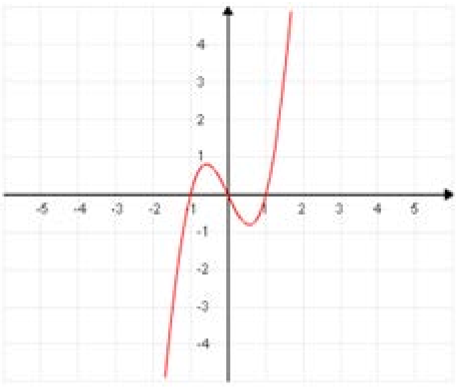
$$x(t) = c_2 \sin(\sqrt{2} \cdot t) + 5 \cdot t$$

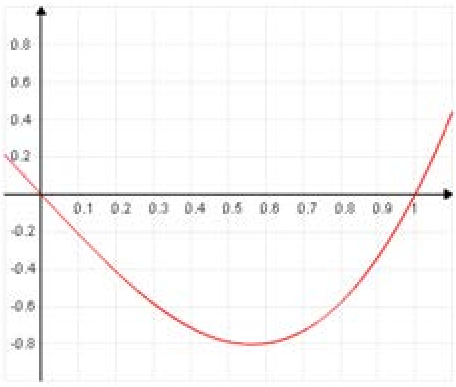
$$x(1) = 0 = c_2 \sin(\sqrt{2} \cdot 1) + 5 \cdot 1 \Rightarrow c_2 = -\frac{5}{\sin(\sqrt{2})}$$

$$\Downarrow$$

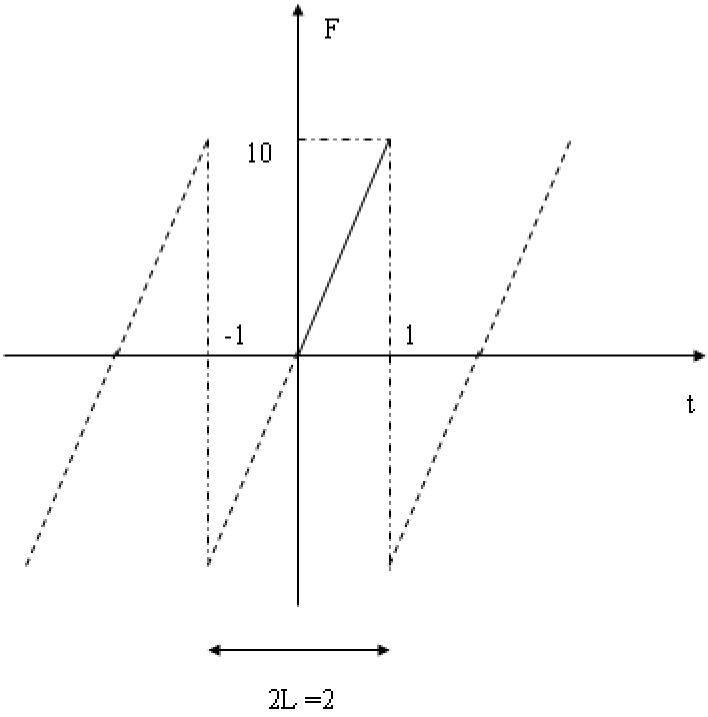
$$\underline{\underline{x(t) = 5t - \frac{5}{\sin(\sqrt{2})}\sin(\sqrt{2} \cdot t)}}$$



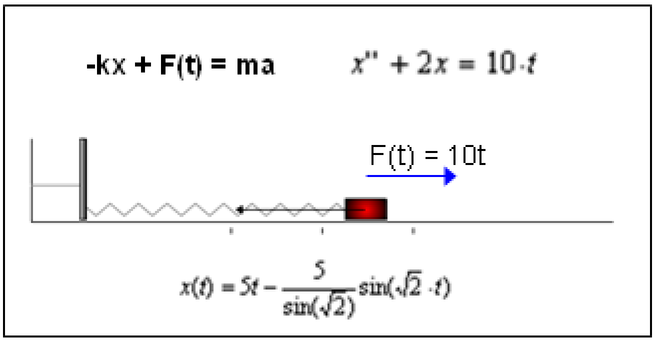




b) Vi periodiserer kraften F(t) = 10t (t inneholdt i det lukkede intervallet fra 0 til 1) slik at den periodiske funksjonen blir symmetrisk om origo med periode 2L = 2 (2 sekunder).



Ved Fourier-utvikling (odde Fourier-utvikling, Fourier sinus-utvikling) av denne periodiske funksjonen vil vi ivareta oppgavens tilleggs-betingelser (passering av origo ved tiden t = 0 og ved tiden t = 1), siden den Fourier-utviklede funksjonen vil gå gjennom origo, samtidig som den også vil gå gjennom punktet (1,0), det sistnevnte pga at 0 er gjennomsnitts-verdien av 10 og -10 (10 + (-10))/2.



Vi får:

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{L}$$

hvor

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L F(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt$$

Med F(t) = At får vi videre:

$$\mathrm{F(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{b_n \sin\frac{n\pi t}{L}}$$

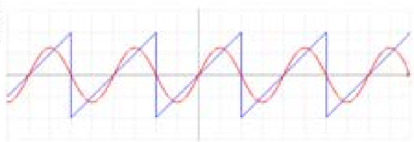
hvor

$$\begin{aligned}
\mathrm{b_n} &= \frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{F(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt} = \frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{At\sin\frac{n\pi t}{L}dt} \\
&= \frac{2A}{L}\int_0^L \mathrm{t\sin\frac{n\pi t}{L}dt} \\
&= \frac{2AL}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi} \mathrm{u\sin(u)du} && \text{substitusjon} \quad u = \frac{n\pi t}{L} \\
&= \frac{2AL}{n^2\pi^2}\left[\left[-u\cos(u)\right]_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi}\cos(u)du\right] && \text{delvis integrasjon} \\
&= \frac{2AL}{n^2\pi^2}\left[-u\cos(u) + \sin(u)\right]_0^{n\pi} \\
&= -\frac{2AL}{n^2\pi^2}\left[n\pi\cos(n\pi)\right] \\
&= -\frac{2AL}{n\pi}\left[\cos(n\pi)\right] \\
&= -\frac{2AL}{n\pi}(-1)^n \\
&= \underline{\frac{2AL}{n\pi}(-1)^{n+1}}
\end{aligned}$$

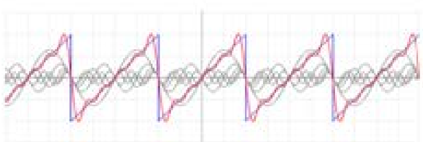
Herav (med A=10 og L=1):

$$\begin{aligned}
F(t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2AL}{n\pi}(-1)^{n+1}\right]\sin\frac{n\pi t}{L} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\cdot 10\cdot 1}{n\pi}(-1)^{n+1}\right]\sin\frac{n\pi t}{1} \\
&= \underline{\frac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}(-1)^{n+1}\right]\sin n\pi t}
\end{aligned}$$

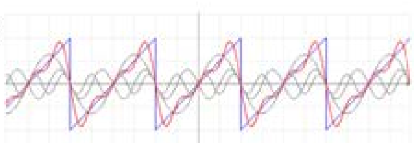
N=1



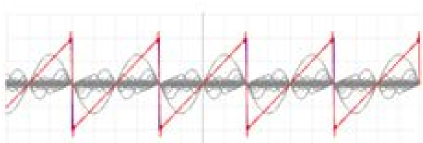
N=5



N=3



N=50



Løsning av diff-ligningen vil nå være:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi t$$

Derivasjon gir nå:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi t$$
$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n \cos n\pi t$$
$$x''(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi^2 B_n \sin n\pi t$$

Innsetting i den opprinnelige diff.lign. gir nå:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-n^2\pi^2 + 2\right]B_n \sin n\pi t = \frac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}(-1)^{n+1}\right]\sin n\pi t$$
$$\left[-n^2\pi^2 + 2\right]B_n = \frac{20}{\pi}\left[\frac{1}{n}(-1)^{n+1}\right]$$
$$\underline{B_n = \frac{\frac{20}{\pi}\left[\frac{1}{n}(-1)^{n+1}\right]}{\left[-n^2\pi^2 + 2\right]} = \frac{20\cdot(-1)^{n+1}}{n\pi(2-n^2\pi^2}}$$

Herav får vi følgende løsning av den opprinnelige diff.lign. med tilleggs-betingelser:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi t$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20\cdot(-1)^{n+1}}{n\pi(2-n^2\pi^2)}\sin n\pi t$$

$$\underline{\underline{\mathrm{x(t)} = \frac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(2-n^2\pi^2)}\sin n\pi t}}$$

Mathcad-løsning med 5 ledd i Fourier-rekken:

Eksakt løsning $x(t) := 5 \cdot t - \frac{5}{\sin(\sqrt{2})} \cdot \sin(\sqrt{2} \cdot t)$ $x(0.7) = -0.732$

Fourier $x2(t) := \frac{20}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{5} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{\left[n \cdot \left(2 - n^2 \cdot \pi^2\right)\right]} \sin(n \cdot \pi \cdot t) \right]$ $x2(0.7) = -0.732$

$t := 0, 0.05 .. 1$