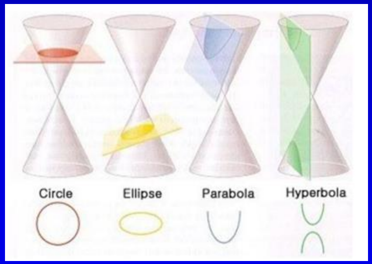
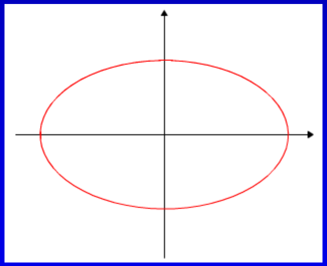
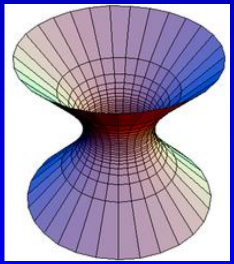
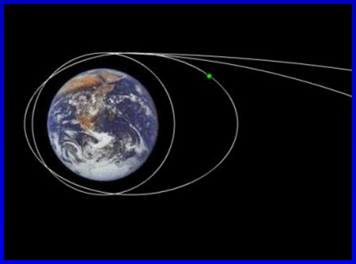
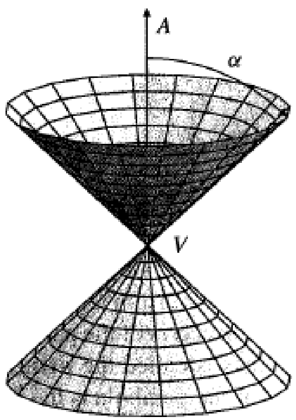
Kjeglesnitt
Parameteriserte kurver
Polarkoordinater

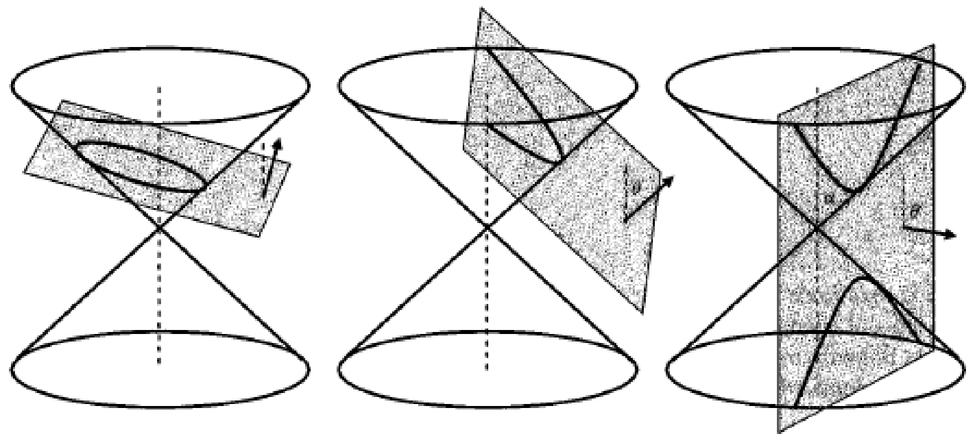


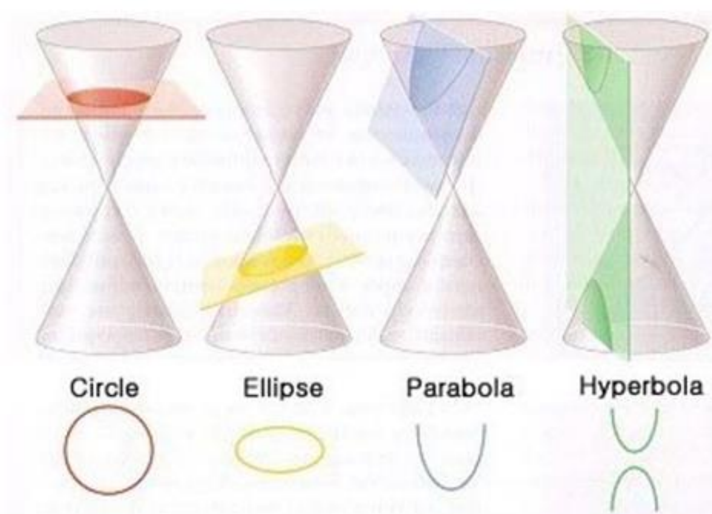


Kjeglesnitt
Def





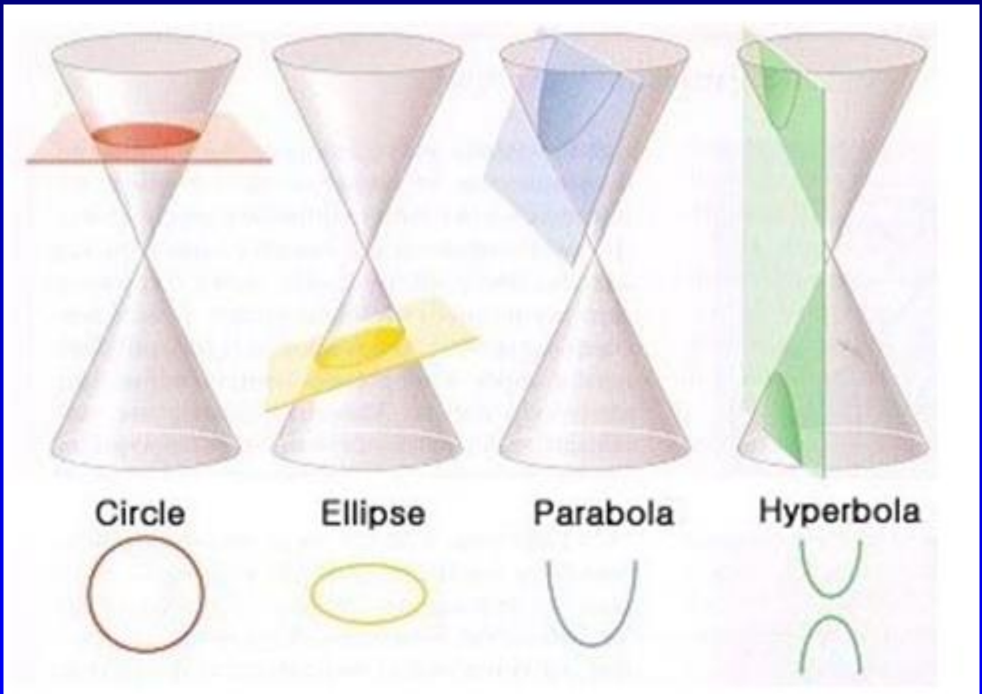
Ellipse Parabel Hyperbel



Sirkel	$\theta = 0$
Ellipse	$0 < \theta < \frac{\pi}{2} - \alpha$
Parabel	$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$
Hyperbel	$\frac{\pi}{2} - \alpha < \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Kjeglesnitt

Punkt – Linje – Sirkel – Ellipse – Parabel - Hyperbel



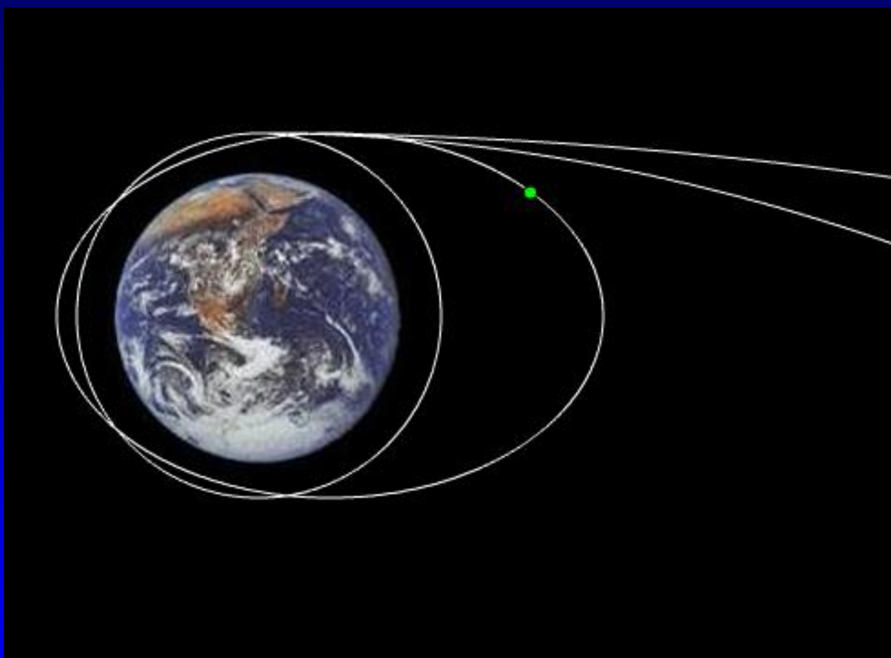
GeomSted		Plan som ...
Punkt	:	Berører kjeglens topp-punkt
Linje	:	Tangerer kjeglens overflate
Sirkel	:	Skjærer vinkelrett på kjeglens akse
Ellipse	:	Skjærer skrått
Parabel	:	Skjærer parallelt med en sidekant
Hyperbel	:	Skjærer begge kjegle-halvdelene

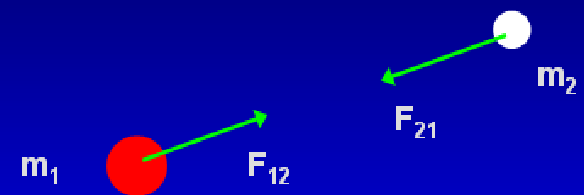
Kjeglesnitt fremkommer ved skjæring mellom:
- **Plan 1.ordens ligning**
- **Kjegle 2.ordens ligning**

Derfor vil alle kjeglesnitt være representert vha kartesiske koordinater x og y i kjeglesnittplanet ved:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Satellitt-baner





$$F(r) = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$G = 6.673 \cdot 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$$

Sirkel
Ellipse
Parabel
Hyperbel

$$r(\theta) = \frac{1}{C\left(1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0)\right)} \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$$

$E > 0$	$\varepsilon > 1$	Hyperbola
$E = 0$	$\varepsilon = 1$	Parabola
$E < 0$	$\varepsilon < 1$	Ellipse
$E = -\frac{\mu k^2}{2L^2}$	$\varepsilon = 0$	Circle

Disse kurvene er baner til legemer som er påvirket av krefter <u>omvendt proporsjonale med kvadratet ev avstand</u>.

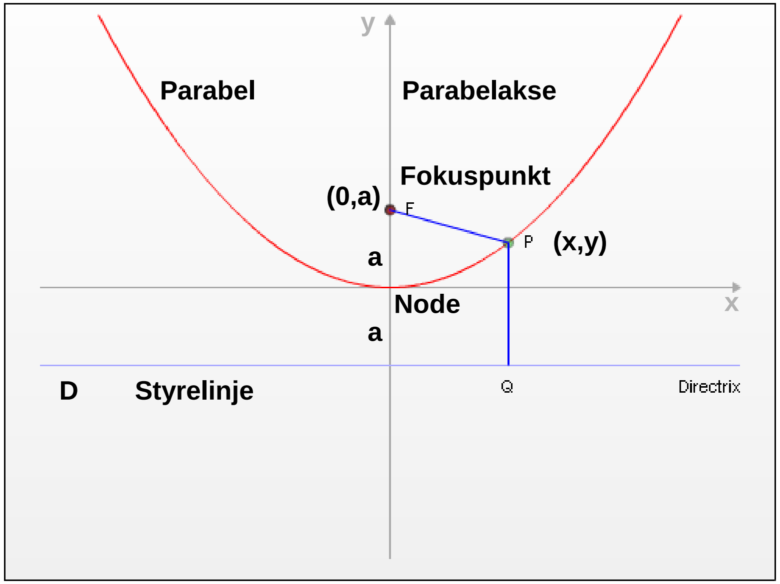
Straks vi kjenner banen, har vi informasjon om <u>hastighet</u>, <u>akselerasjon</u> og <u>krefter</u>.

Parabel [0/4]

Def

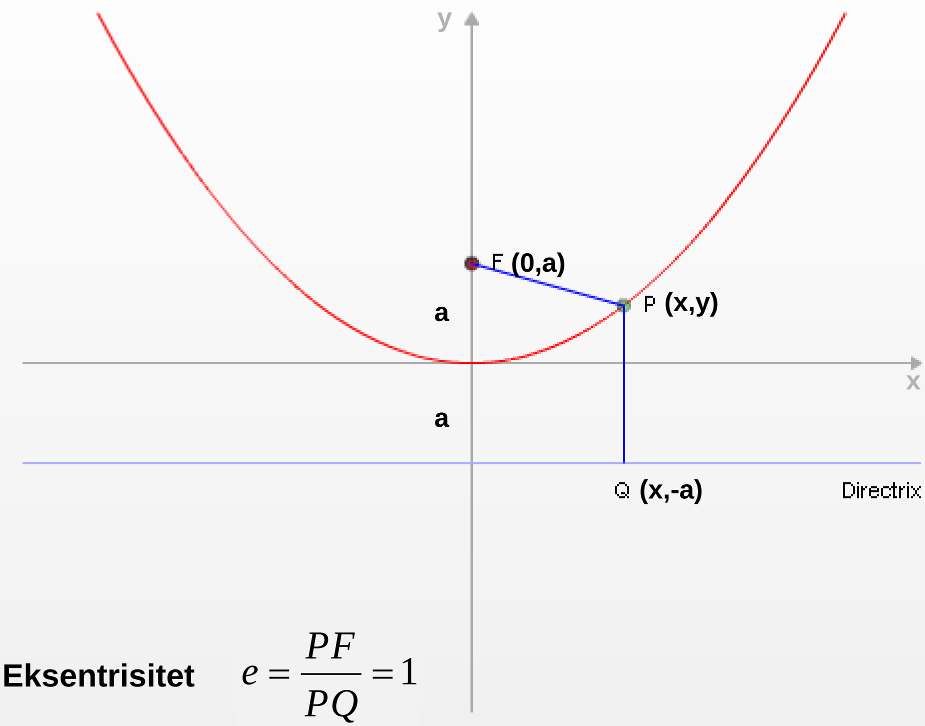
En parabel er mengden av alle de punkter P i planet
som er ekvidistante fra et gitt punkt F kalt fokuspunktet til parabelen
og en gitt rett linje D kalt styrelinjen (directrix) til parabelen.

Linjen gjennom fokuspunktet normalt på styrelinjen kalles parabelaksen.
Noden (vertex) til parabelen er det punktet hvor parabelen krysser parabelaksen.
Denne noden befinner seg midt mellom fokuspunktet og styrelinjen.



Parabel [1/4]

Ligning - Fokuspunkt / Styrelinje - Symmetri om 2.aksen



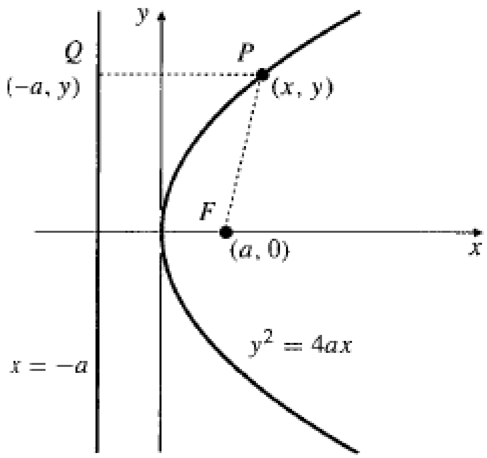
Eksentrisitet $e = \dfrac{PF}{PQ} = 1$

$$
\begin{aligned}
PF &= PQ \\
\sqrt{x^2 + (y-a)^2} &= y + \mathrm{a} \\
x^2 + (y-a)^2 &= (y+a)^2
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\begin{aligned} x^2 &= 4ay \\ y &= \frac{1}{4a}x^2 \end{aligned}}
$$

Parabel [2/4]

Ligning - Fokuspunkt / Styrelinje - Symmetri om 1.aksen

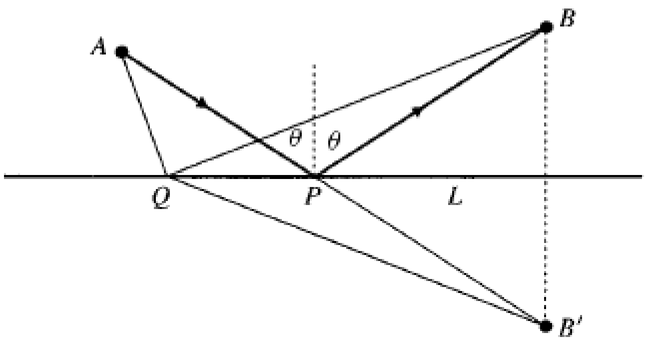


Eksentrisitet $e = \dfrac{PF}{PQ} = 1$

$$\begin{aligned} PF &= PQ \\ \sqrt{(x-a)^2 + y^2} &= x + \mathrm{a} \\ (x-a)^2 + y^2 &= (x+a)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y^2 &= 4ax \\ x &= \frac{1}{4a} y^2 \end{aligned}}$$

Parabel [3/4]
Refleksjonsegenskaper - Rett linje



Lys forplanter seg langs rette linjer
i medier med konstant optisk tetthet (konstant lyshastighet).
Dette er en konsekvens av prinsippet for 'Least Action'
hvor lys som beveger seg mellom to punkter A og B
alltid velger den veien som gir minimal tid.

Gitt en rett linje L i planet og to punkter A og B i planet på samme side av L.
Det punktet P på L som minimaliserer avstanden AP + PB er slik at AP og PB danner samme vinkel til L,
eller ekvivalent, danner samme vinkel med normalen til L i P.
Ved å forlenge AP til den skjærer forlengelsen av normalen fra B til L i punktet B',
vil B og B' ha samme avstand til L og PB' vil være like lang som PB.
Siden en side i en trekant ikke kan være lenger enn summen av de to andre sidene, får vi:

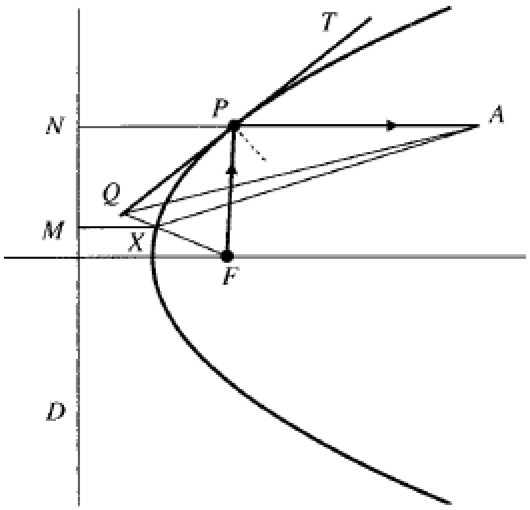
$$AP + PB = AP + PB' = AB' \leq AQ + QB' = AQ + QB$$

Refleksjon ved en rett linje:

Punktet P på L hvor en lysstråle fra A reflekterer til å passere gjennom B er det punktet som minimaliserer distansen AP + PB.

Parabel [4/4]

Refleksjonsegenskaper - Parabel



Parabel med fokuspunkt (focus) F og styrelinje (directrix) D.
P et punkt på parabelen.
T tangenten til parabelen i P.
Q et vilkårlig punkt på T.
FQ skjærer parabelen i et punkt X mellom F og Q.
M og N to punkter på D slik at MX og NP begge står normal på D.
A et punkt på forlengelsen NP på samme side av parabelen som F.

Vi får:

$$\begin{aligned} FP + PA &= NP + PA \\ &= NA \\ &\le MX + XA \\ &= FX + XA \\ &\le FX + XQ + QA \\ &= FQ + QA \end{aligned}$$

Parabel-refleksjon:

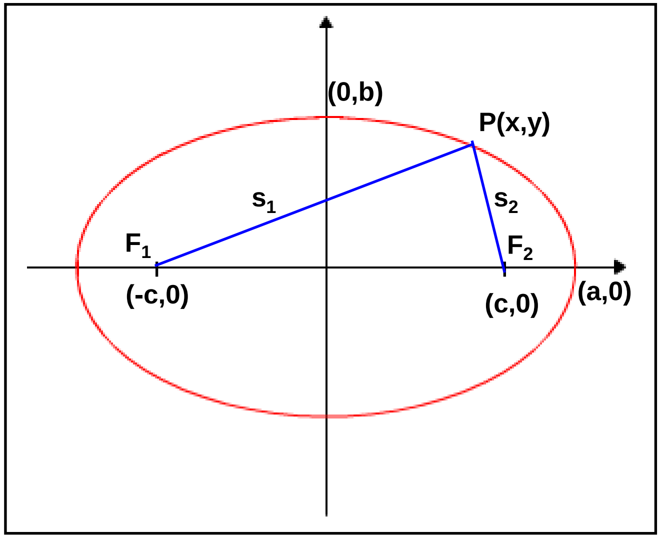
Enhver stråle fra fokuspunktet F vil bli reflektert parallelt med parabelaksen.
Ekvivalent vil enhver innkommende stråle parallell med parabelaksen reflekteres gjennom fokuspunktet.

Ellipse [0/3]

Def

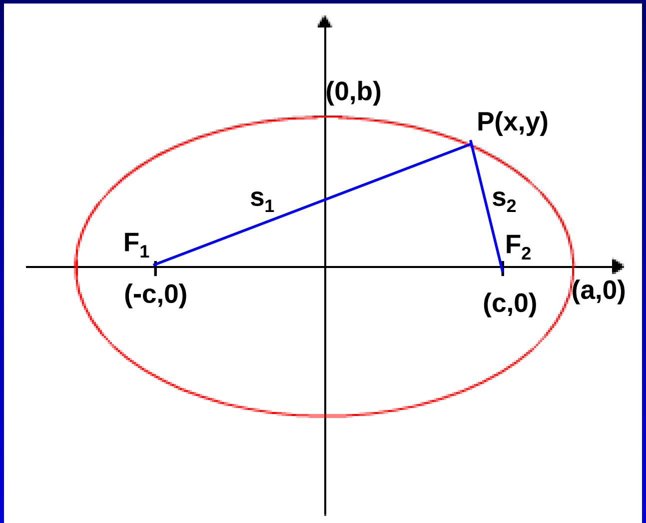
En <u>ellipse</u> er mengden av alle de punkter P i planet
hvor summen av avstandene til to gitt punkter F_1 og F_2 kalt <u>fokuspunktene</u> er konstant.

Punktet midt mellom fokuspunktene kalles <u>ellipsesenteret</u>.
Linjen som inneholder fokuspunktene kalles <u>den store aksen</u> (hovedaksen).
Linjen gjennom ellipsesenteret normalt på hovedaksen kalles <u>den lille aksen</u>.



Ellipse [1/3]

Ligning



Fokuspunkter	$(-c,0)$ $(c,0)$
Hovedhalvakse	a
Lillehalvakse	b
Halvfokusdistanse	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$
Eksentrisitet	$e = \dfrac{c}{a}$

$$s_1 + s_2 = \text{konstant}$$
$$PF_1 + PF_2 = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$
$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$
$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$
$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$
$$a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right] = (a^2 - cx)^2$$
$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$a > c$

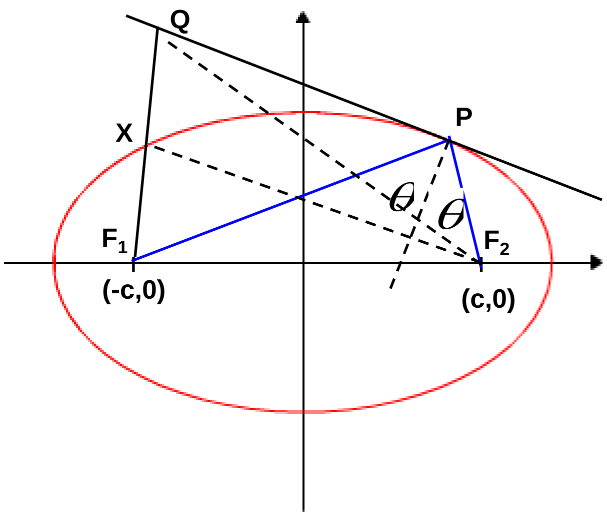
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$ $\qquad$ $e = \dfrac{c}{a}$

Ellipse [2/3]

Refleksjonsegenskaper



Q et vilkårlig punkt på tangenten T til ellipsen i P.
F_1Q skjærer ellipsen i et punkt X mellom F_1 og Q.

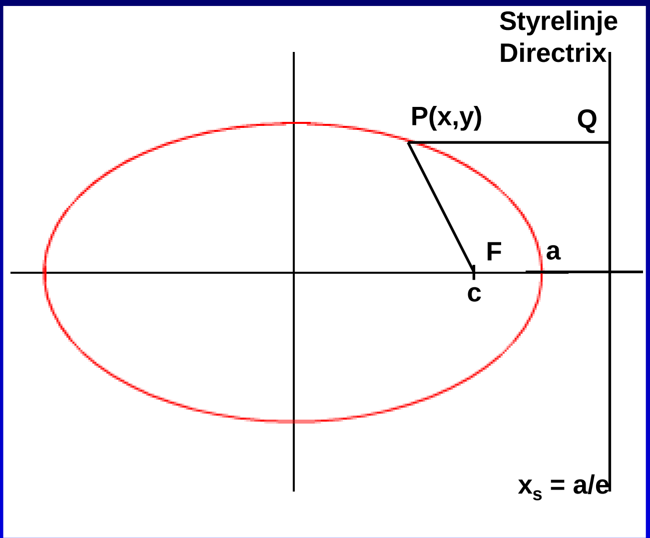
Vi får:

$$\begin{aligned} F_1P + PF_2 &= F_1X + XF_2 \\ &\leq F_1X + XQ + QF_2 \\ &= F_1Q + QF_2 \end{aligned}$$

Ellipse-refleksjon:

Enhver stråle fra et fokuspunkt i en ellipse vil bli reflektert gjennom det andre fokuspunktet i ellipsen.

Ellipse [3/3]
Styrelinje (directrix)



Fokuspunkter	$(-c,0)$	$(c,0)$
Hovedhalvakse	a	
Minorhalvakse	b	
Halvfokusdistanse	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	
Eksentrisitet	$e = \dfrac{c}{a}$	

$$e = \frac{PF}{PQ} \quad \Rightarrow \quad PQ = \frac{1}{e}PF$$

$$\begin{aligned}
PF^2 &= (x-c)^2 + y^2 \\
&= x^2 - 2cx + c^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \\
&= x\frac{a^2-b^2}{a^2} - 2cx + a^2 - b^2 + b^2 \\
&= e^2x^2 - 2eax + a^2 \\
&= (a-ex)^2
\end{aligned}$$

$$x_s = x + PQ = x + \frac{1}{e}(a - ex) = \frac{a}{e}$$

Ellipsens styrelinjer er plassert i posisjon $x_s = \pm\dfrac{a}{e}$

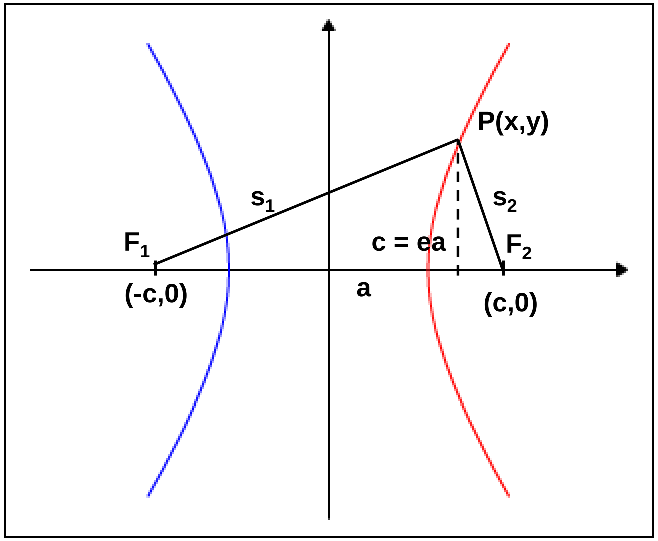
En parabel kan betraktes som grensetilfellet av en ellipse hvor eksentrisiteten har økt til 1.
Avstanden mellom fokuspunktene er uendelig, slik at senteret, ett fokuspunkt og tilhørende styrelinje er flyttet mot uendelig.

Hyperbel [0/2]

Def

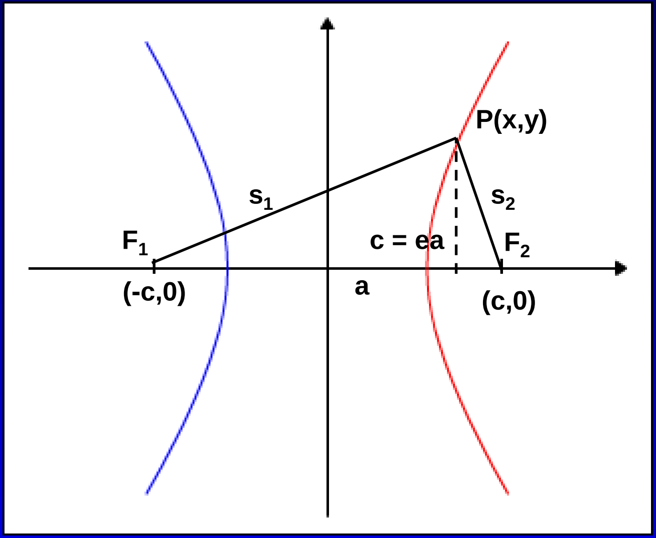
En <u>hyperbel</u> er mengden av alle de punkter P i planet
hvor differensen mellom avstandene til to gitte punkter F_1 og F_2 kalt <u>fokuspunktene</u> er konstant.

Punktet midt mellom fokuspunktene kalles <u>hyperbelsenteret</u>.
Linjen som inneholder fokuspunktene kalles for <u>hyperbelaksen</u>.



Hyperbel [1/2]

Ligning



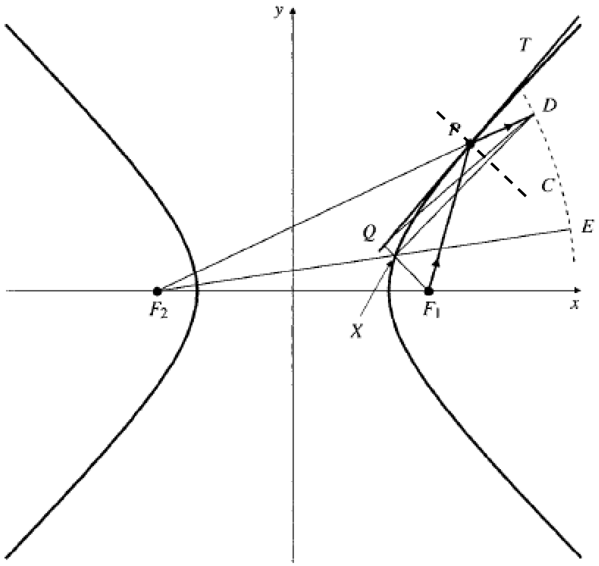
$$
\begin{aligned}
s_1 - s_2 &= \text{konstant} \\
PF_1 - PF_2 &= \pm 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= \pm 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
(x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\
\pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 4a^2 - 4cx \\
\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - cx \\
a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right] &= (a^2 - cx)^2 \\
a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\
(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2)
\end{aligned}
$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 \qquad a < c$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2} \qquad e = \frac{c}{a}$$

Hyperbel [2/2]

Refleksjonsegenskaper



P et vilkårlig punkt på hyperbelen med fokuspunkter F_1 og F_2.
Tangenten T til hyperbelen i P halverer vinkelen mellom F_1P og F_2P.
Dette ser vi på følgende måte:

C er en sirkel med sentrum i F_2.
F_2P skjærer sirkelen i D.
Q er et vilkårlig punkt på tangenten T.
QF_1 skjærer hyperbelen i X.
F_2X skjærer sirkelen C i E.
X har E som sitt nærmeste punkt på C (F_2E er radius i sirkelen), dvs XE < XD.

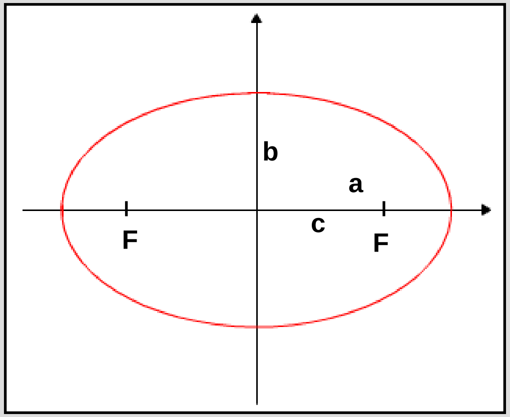
Vi får:

$$
\begin{aligned}
F_1P + PD &= F_1P + F_2D - F_2P \\
&= F_2D - (F_2P - F_1P) \\
&= F_2E - (F_2X - F_1X) \\
&= F_1X + F_2E - F_2X \\
&= F_1X + XE \\
&\le F_1X + XD \\
&\le F_1X + QX + QD \\
&= F_1Q + QD
\end{aligned}
$$

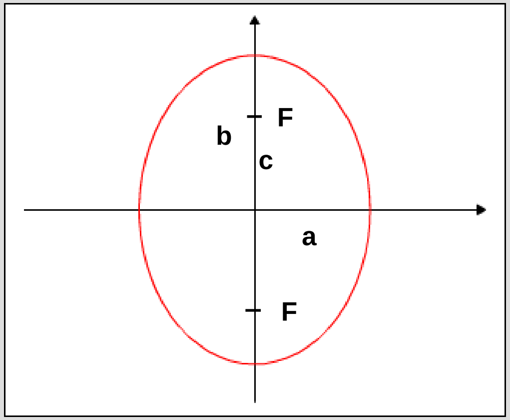
Hyperbel-refleksjon:

Enhver stråle fra et fokuspunkt i en hyperbel vil bli reflektert av hyperbelen slik at det ser ut til at strålen kommer fra det andre fokuspunktet.

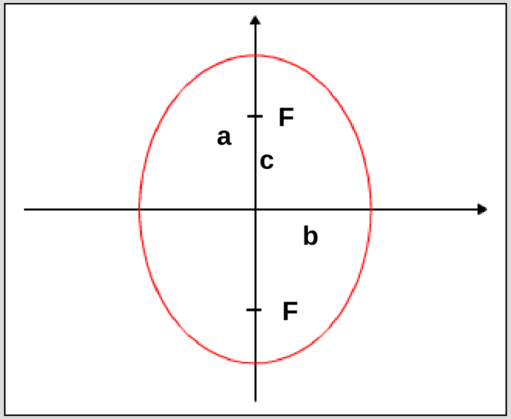
Retning av kjeglesnitt
Ellipse



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad c=\sqrt{a^2-b^2}$$



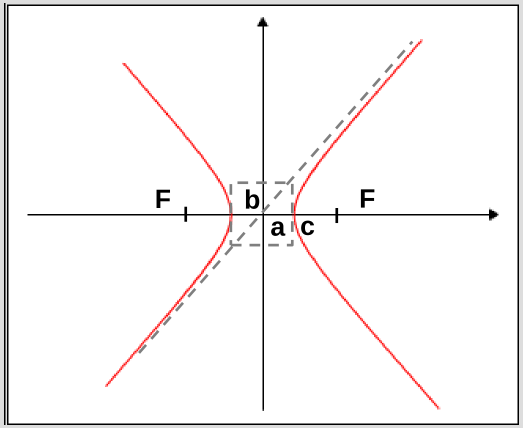
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Retning av kjeglesnitt
Hyperbel

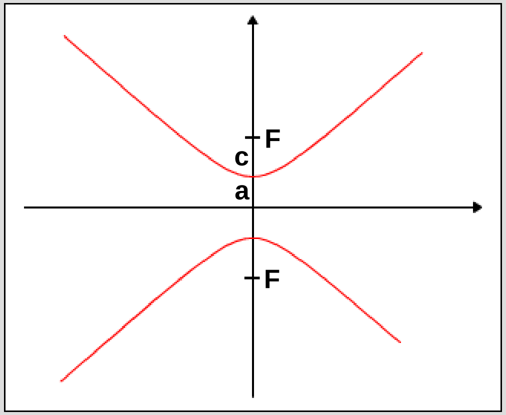


$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad c=\sqrt{a^2+b^2}$$

Asymptoter

$$y^2=b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)=\frac{b^2}{a^2}x^2\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)$$

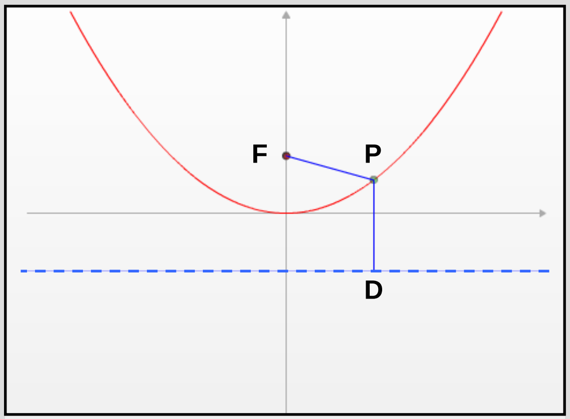
$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} \quad \xrightarrow[|x|\to\infty]{} \quad \pm\frac{b}{a}x$$

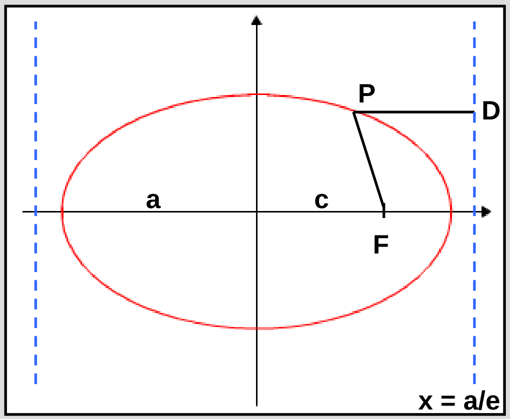


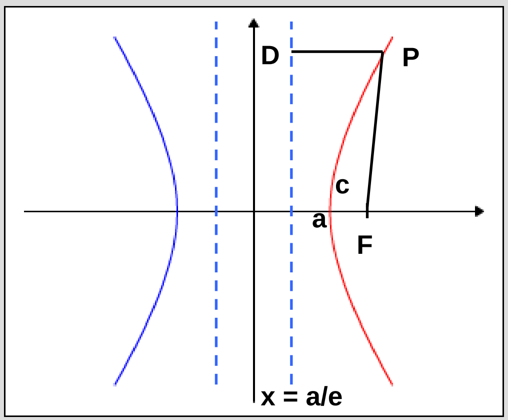
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

Eksentrisitet







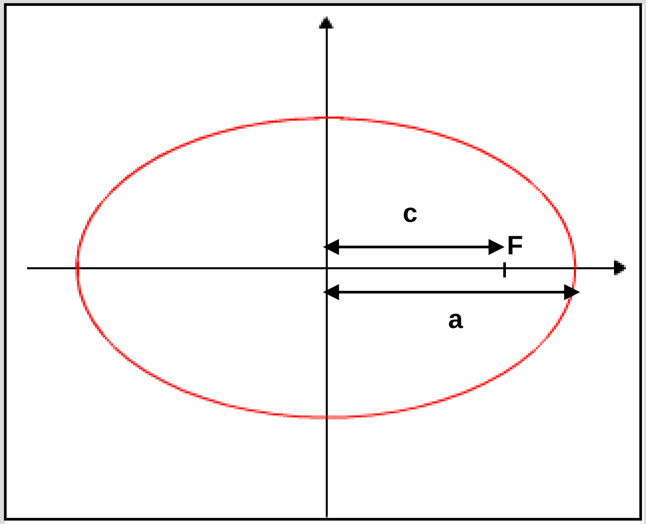
$$e = \frac{PF}{PD} = 1$$

$$e = \frac{PF}{PD} = \frac{c}{a} < 1$$

$$e = \frac{PF}{PD} = \frac{c}{a} > 1$$

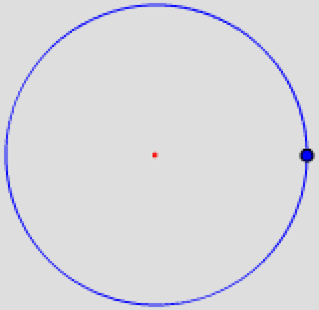
$$e = \frac{PF}{PD} = \frac{\text{Avstand fra P til nærmeste fokuspunkt}}{\text{Avstand fra P til nærmeste styrelinje}}$$

Eksentrisitet

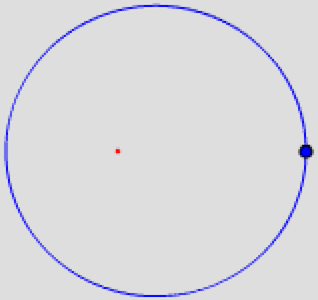


$$e = \frac{c}{a} < 1$$

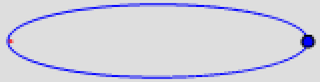
Objekt	e
Merkur	0.21
Venus	0.01
Jorda	0.02
Mars	0.09
Jupiter	0.05
Saturn	0.06
Uranus	0.05
Neptun	0.01
Pluto	0.25
Halley's komet	0.97



$e = 0.01$

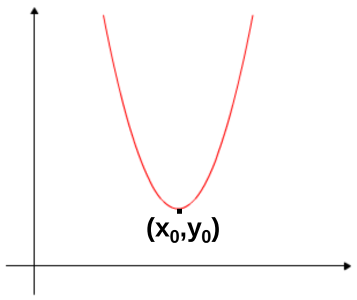
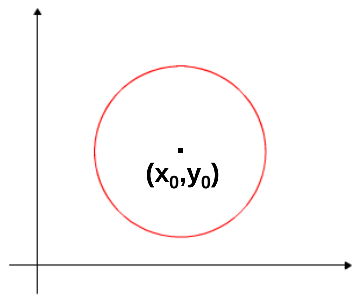
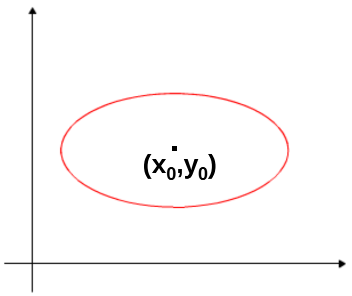
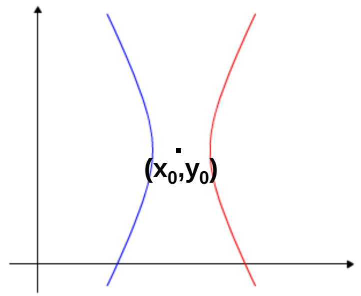


$e = 0.25$



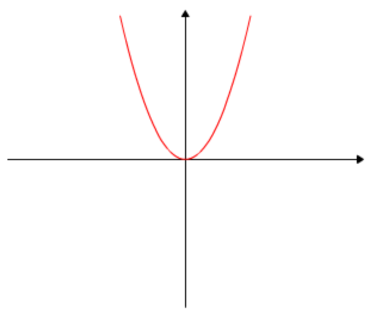
$e = 0.97$

Parabel - Sirkel - Ellipse - Hyperbel
Ligninger - Sentrum i (x_0,y_0)

Parabel	Sirkel	Ellipse	Hyperbel
			
$y = y_0 + k(x - x_0)^2$	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$	$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$	$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$
$B^2 - 4AC = 0$	$A = C \qquad B = 0$	$B^2 - 4AC < 0$	$B^2 - 4AC > 0$

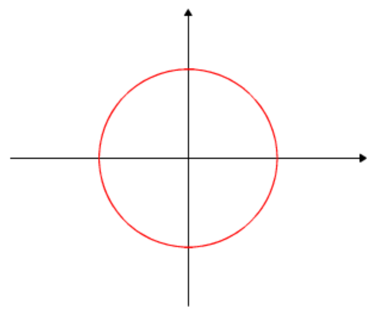
$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Parabel - Sirkel - Ellipse - Hyperbel
Ligninger - Sentrum i origo



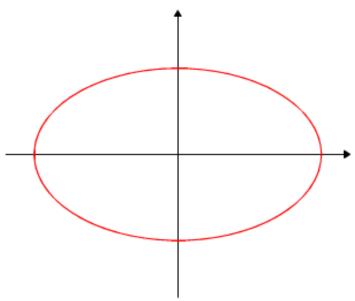
Parabel

$$y = y_0 + kx^2$$



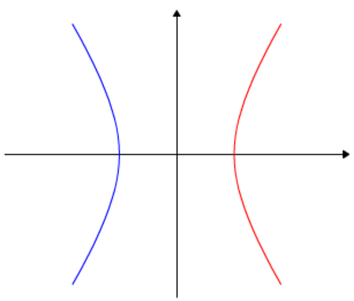
Sirkel

$$x^2 + y^2 = R^2$$



Ellipse

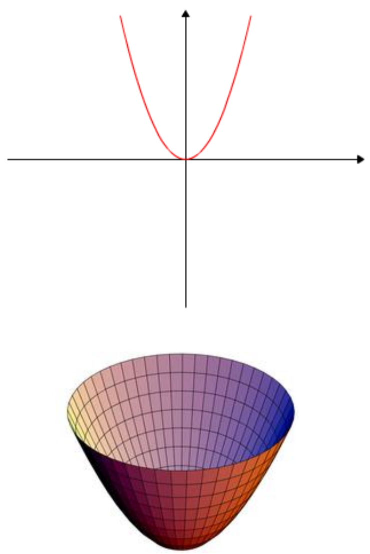
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$



Hyperbel

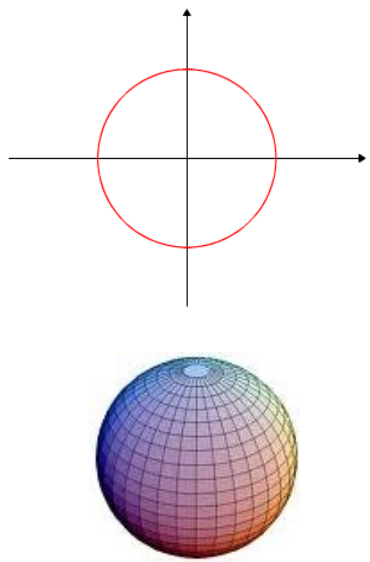
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Paraboloide - Kule - Ellipsoide - Hyperboloide
Ligninger - Sentrum i origo



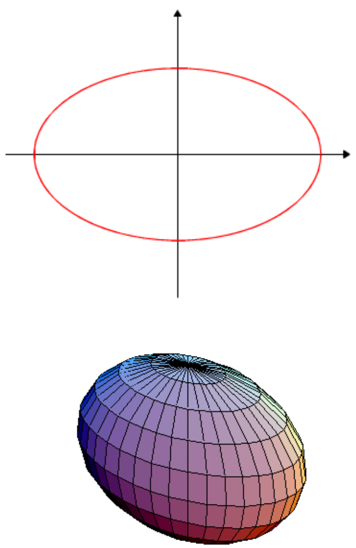
Paraboloide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$$



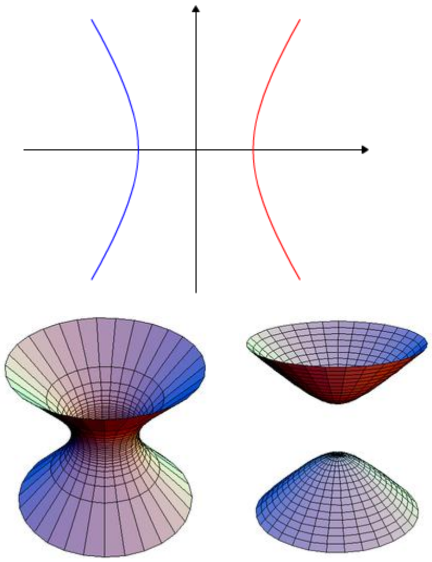
Kule

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$



Ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



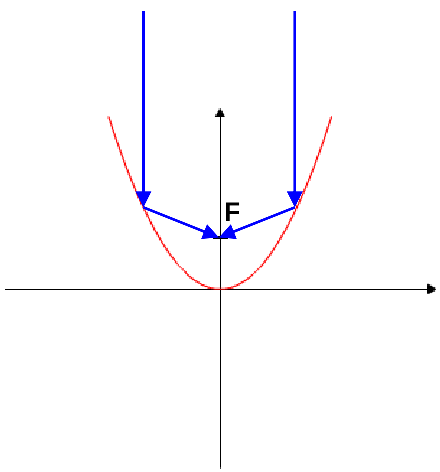
Hyperboloide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$$

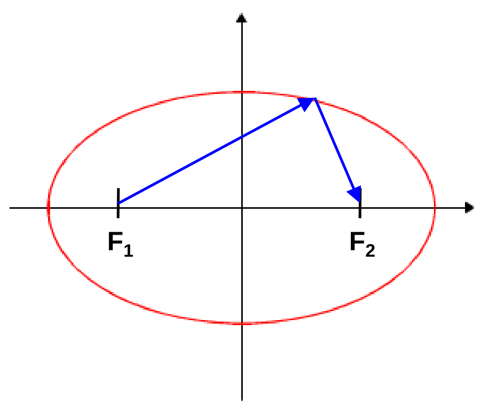
Refleksjons-egenskaper

Teori

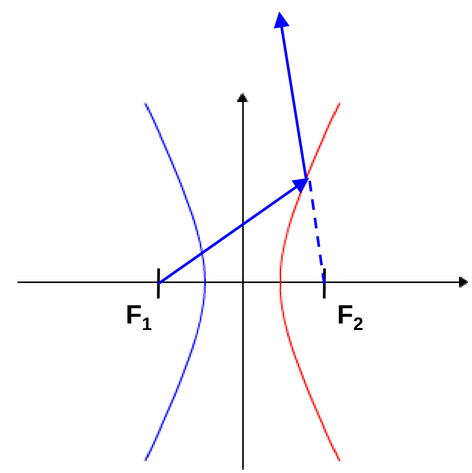
Parabel
Paraboloide



Ellipse
Ellipsoide



Hyperbel
Hyperboloide

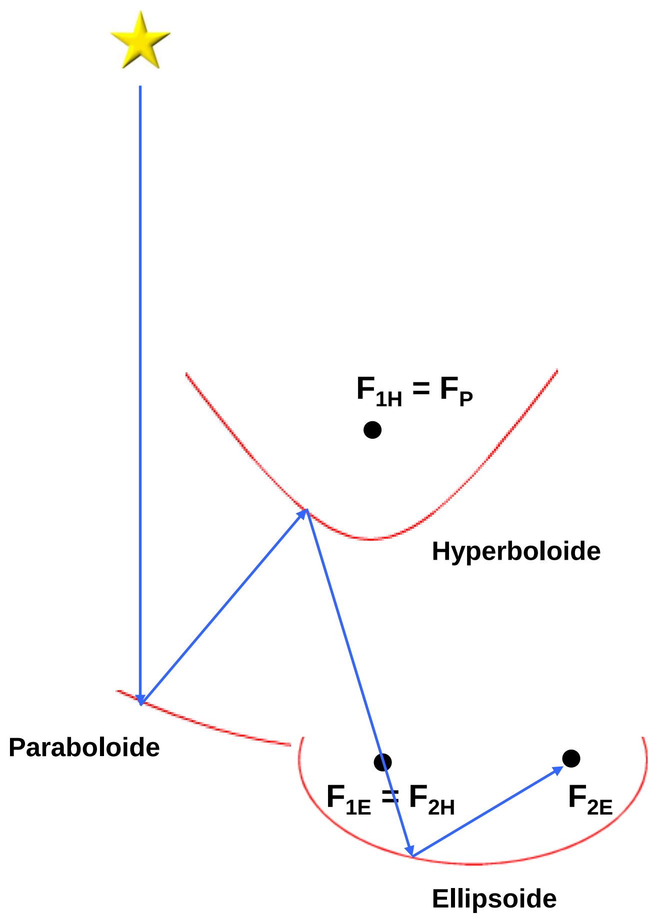


Innkommende stråler parallelle med hovedaksen reflekteres gjennom fokus-punktet

Stråler fra det ene fokus-punktet reflekteres gjennom det andre fokuspunktet

Stråler fra det ene fokus-punktet reflekteres i retning fra det andre fokuspunktet

Refleksjons-egenskaper
Stjernekikkert



Vi har:
- **Lys fra en stjerne**
- **En paraboloide**
- **En hyperboloide**
- **En ellipsoide**

Stjernen befinner seg i lang avstand fra stjernekikkerten. Lys fra stjernen kommer inn mot paraboloiden parallelt med paraboloidens hovedakse.

Lyset reflekteres i paraboloiden i retning mot paraboloidens fokuspunkt F_P som faller sammen med fokuspunkt nr 1 F_{1H} i hyperboloiden.

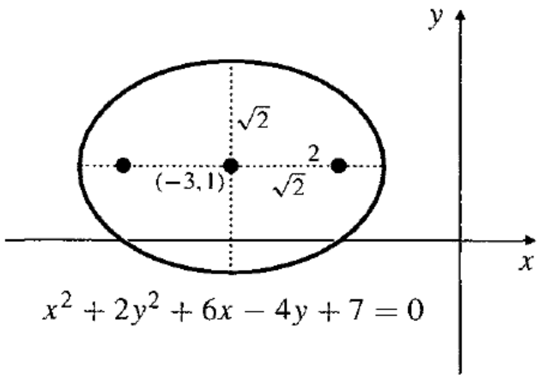
Lyset reflekteres i hyperboloiden i retning mot hyperboloidens fokuspunkt nr 2 F_{2H} som faller sammen med fokuspunkt nr 1 F_{1E} i ellipsoiden.

Lyset reflekteres i ellipsoiden i retning mot ellipsoidens fokuspunkt nr 2 F_{2E}.

Kjeglesnitt
Klassifisering [1/4]

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

$A^2 + B^2 + C^2 > 0$



Degenererte tilfeller:

$x^2 - y^2 = 0$	Linjene	$x = y$ og $x = -y$
$x^2 = 0$	Linjen	$x = 0$
$x^2 + y^2 = 0$	Punkt	Origo
$x^2 + y^2 = -1$	Ingen punkter	

Omskriving (eks B = 0):

$x^2 + 2y^2 + 6x - 4y + 7 = 0$
$x^2 + 6x + 9 + 2(y^2 - 2y + 1) = 9 + 2 - 7 = 4$
$(x+3)^2 + 2(y-1)^2 = 4$

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$$

Ellipse med senter i $(-3,1)$,

hovedhalvakse $a = 2$,

minorhalvakse $b = \sqrt{2}$

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2}$

Fokuspunkt $(-3 \pm \sqrt{2}, 1)$

Kjeglesnitt
Klassifisering [2/4]

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

$A^2 + B^2 + C^2 > 0$

$B \neq 0$

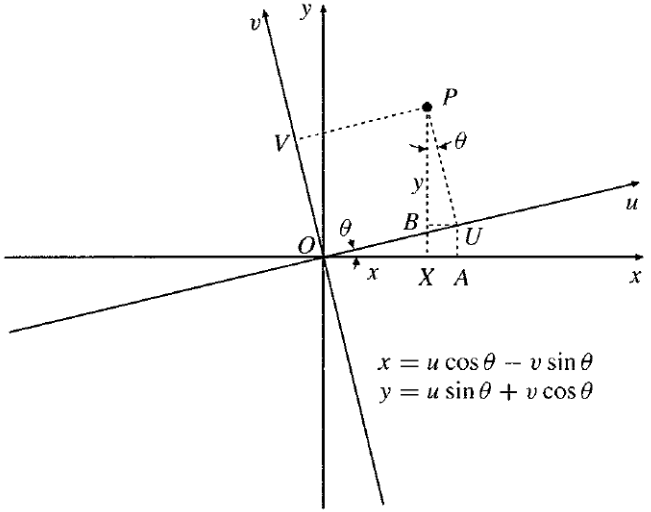
Substitusjon:

$$x = OA - XA = OU\cos\theta - OV\sin\theta = u\cos\theta - v\sin\theta,$$
$$y = XB + BP = OU\sin\theta + OV\cos\theta = u\sin\theta + v\cos\theta.$$

$$\Downarrow$$

$$A'u^2 + B'uv + C'v^2 + D'u + E'v + F = 0$$

$$A' = \frac{1}{2}\Big(A(1+\cos 2\theta) + B\sin 2\theta + C(1-\cos 2\theta)\Big)$$
$$B' = (C-A)\sin 2\theta + B\cos 2\theta$$
$$C' = \frac{1}{2}\Big(A(1-\cos 2\theta) - B\sin 2\theta + C(1+\cos 2\theta)\Big)$$
$$D' = D\cos\theta + E\sin\theta$$
$$E' = -D\sin\theta + E\cos\theta.$$



Velger:

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A-C}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ if } A = C,\ B \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$B' = 0$$

Kjeglesnitt
Klassifisering [3/4] - Eks 1

$\boxed{xy = 1}$

A = C = D = E = 0
B = 1

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A - C}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ if } A = C,\ B \neq 0$$

Roterer en vinkel $\theta = \pi / 4$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u - v) \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + v)$$

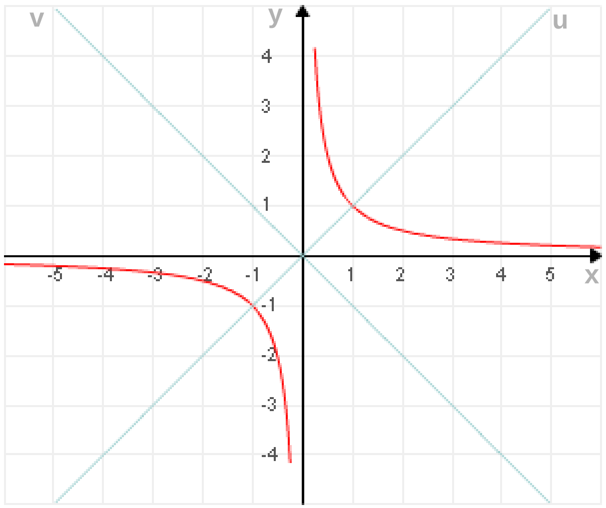
$$\Downarrow$$

$$u^2 - v^2 = 2$$

Hyperbel med noder $u = \pm a = \pm\sqrt{2} \quad v = 0$

Fokuspunkt $u = \pm c = \pm 2 \quad v = 0$

Asymptoter $u = \pm v$

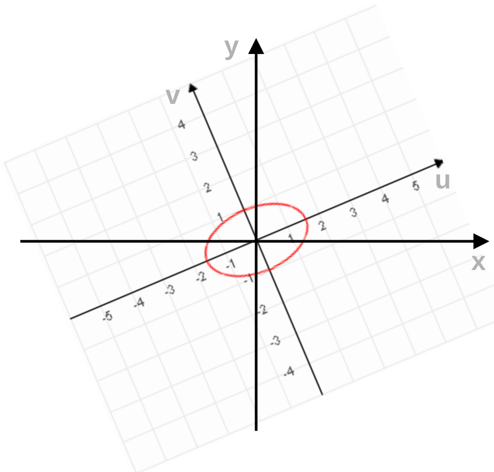


xy = 1 representerer en rektangulær hyperbel med koordinataksene som asymptoter, noder i (1,1) og (-1,-1) og fokuspunkter i $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ og $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Kjeglesnitt
Klassifisering [4/4] - Eks 2

$2x^2+xy+y^2 = 2$

A = 2
B = C = 1
D = E = 0
F = -2



Vi roterer aksene en vinkel gitt ved:

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A-C} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$B' = 0$$

$$2\theta = \frac{\pi}{4} \qquad \sin 2\theta = \cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$A' = \frac{1}{2}\left[2\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$$

$$C' = \frac{1}{2}\left[2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$$

Transformert ligning:

$$(3+\sqrt{2})u^2 + (3-\sqrt{2})v^2 = 4$$

$$\frac{u^2}{\frac{4}{3-\sqrt{2}}} + \frac{v^2}{\frac{4}{3+\sqrt{2}}} = 1$$

Ellipse med

Hovedhalvakse $\dfrac{2}{\sqrt{3-\sqrt{2}}}$

Minorhalvakse $\dfrac{2}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$

END