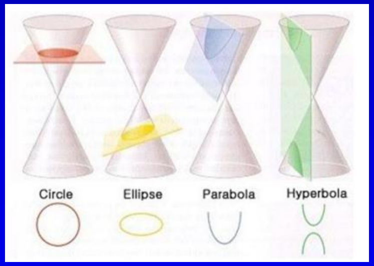
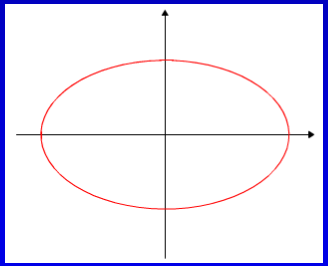
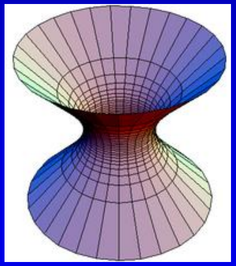
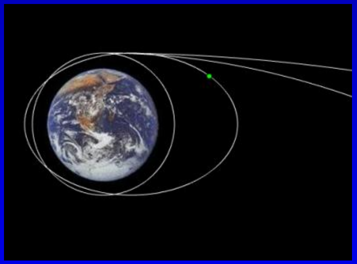
Parameteriserte kurver









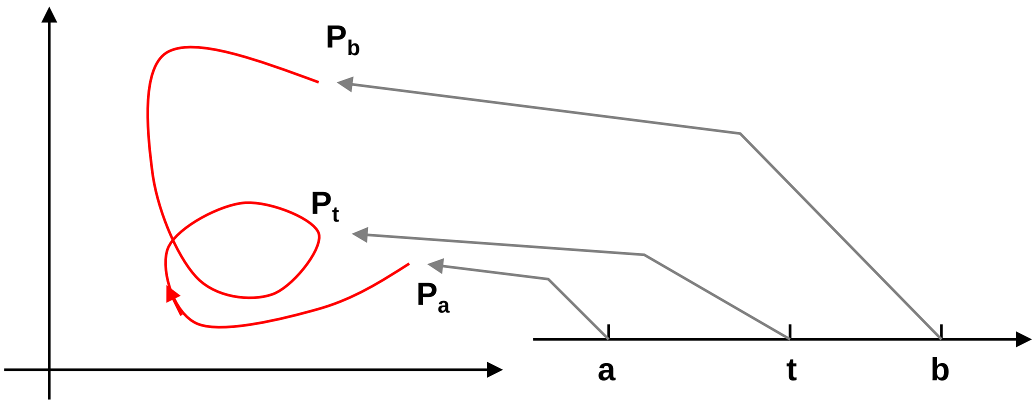
Parameterisert kurve i planet
Def

En parameterisert kurve C i planet er et ordnet par (f,g) av kontinuerlige funksjoner hver definert på det samme intervallet I.

Ligningene

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad t \in I$$

kalles for parametriske ligninger til kurven C.
Den uavhengige variabelen t kalles parameteren.



Den parameteriserte kurven C tilordnes en retning svarende til økende verdi av parameteren t.

t benyttes ofte som notasjon på parameteren, og ofte (men ikke alltid) svarer denne til tiden t.

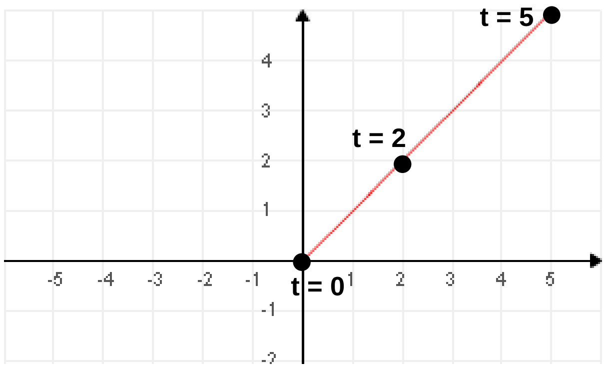
Parameterisert kurve i planet
Eks 1 - Rett linjestykke

Parameterisert kurve

$$x = t \qquad y = t \qquad t \in [0,5]$$

Tabell

	$x = t$	$y = t$
0	0	0
1	1	1
2	2	2
...	...	...
5	5	5



Eliminasjon av parameteren t

$$x = t \qquad y = t \qquad t \in [0,5]$$

$$t = x \qquad \underline{y = x}$$

Rett linjestykke gjennom origo med stigningstall 1

Merk: **Parameterisering av en kurve er ikke nødvendigvis entydig**

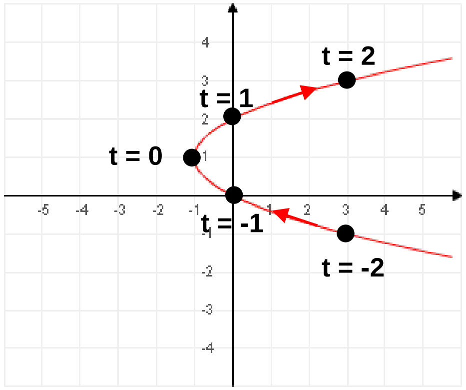
$$x = 2t \qquad y = 2t \qquad t \in [0,2.5]$$

Parameterisert kurve i planet

Eks 2 - Parabel

Parameterisert kurve

$$x = t^2 - 1 \qquad y = t + 1 \qquad t \in \langle -\infty, \infty \rangle$$



Tabell

	$x = t^2 - 1$	$y = t + 1$
...	...	...
-2	3	-1
-1	0	0
0	-1	1
1	0	2
2	3	3
...	...	...

Eliminasjon av parameteren t

$$x = t^2 - 1 \qquad y = t + 1 \qquad t \in \langle -\infty, \infty \rangle$$

$$t = y - 1$$

$$x = t^2 - 1 = (y-1)^2 - 1 = y^2 - 2y + 1 - 1 = y^2 - 2y$$

$$x = (y-1)^2 - 1$$

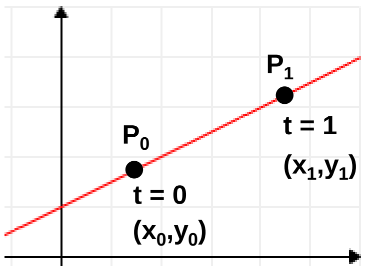
$$x = \frac{1}{4a}(y - y_1)^2 - x_1 \qquad a = \frac{1}{4} \qquad x_1 = -1$$

Parabel

Parameterisert kurve i planet
Eks 3 - Rett linje

Parameterisert kurve

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0) \qquad t \in \langle -\infty, \infty \rangle$$
$$y = y_0 + t(y_1 - y_0)$$



StIgningstall

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \text{konstant}$$

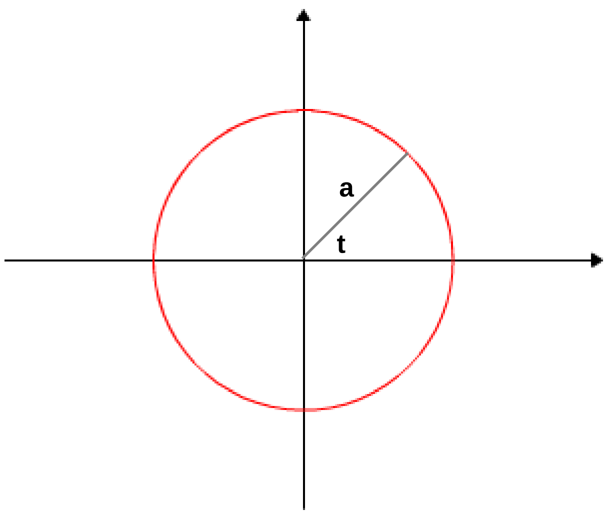
Parameterisert kurve i planet

Eks 4 - Sirkel

Parameterisert kurve

$$x = a\cos t \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$y = a\sin t$$



Kommentar

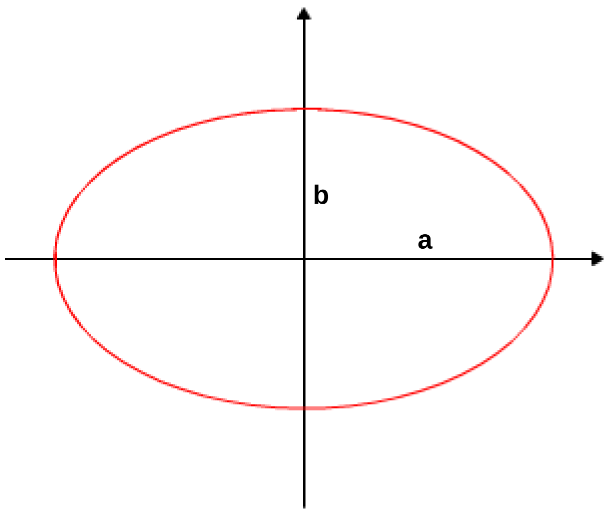
$$x^2 + y^2 = (a\cos t)^2 + (a\sin t)^2 = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2 \cdot 1 = a^2$$

t er vinkelen med 1.aksen

Parameterisert kurve i planet
Eks 5 - Ellipse

Parameterisert kurve

$$x = a\cos t \qquad t \in [0, 2\pi]$$
$$y = b\sin t$$

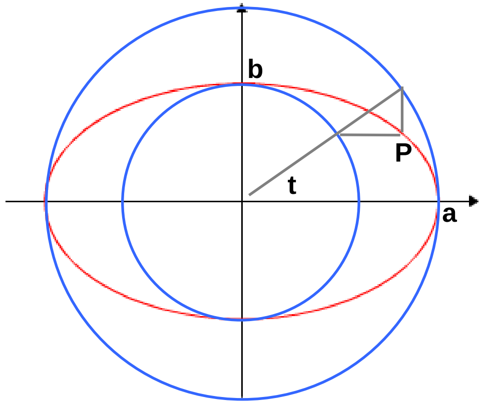


Kommentar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Konstruksjon av en ellipse vha to sirkler

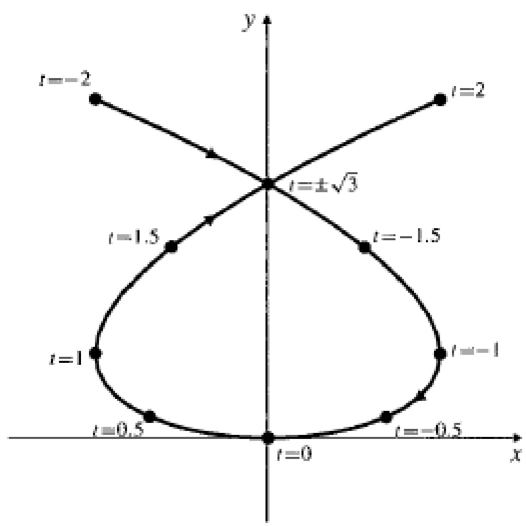
$$x_P = b\cos t + k_x = b\cos t + (a-b)\cos t = a\cos t$$
$$y_P = a\sin t - k_y = a\sin t - (a-b)\sin t = b\sin t$$



Parameterisert kurve i planet
Eks 6

Parameterisert kurve

$$x = t^3 - 3t \qquad t \in [-2, 2]$$
$$y = t^2$$



Eliminasjon av t

$$x^2 = t^2\left(t^2 - 3\right)^2 = y\left(y - 3\right)^2$$

Vanskelig gjenkjennbar

Tabell

t	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	-2	$\frac{9}{8}$	2	$\frac{11}{8}$	0	$-\frac{11}{8}$	-2	$-\frac{9}{8}$	2
y	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4

Merk:
Kurven er symmetrisk om y-aksen
siden x er odde funksjon av t $\quad$ x(-t) = -x(t)
og y er en even funksjon av t $\quad$ y(-t) = y(t)

Skjæring med y-aksen:

$$x = 0$$

$$t^3 - 3t = t(t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3}) = 0$$

Kurver i planet
Parameterisert kurve
Plan kurve - Parameterisering av en plan kurve

Parameterisert kurve:

En parameterisert kurve C i planet er et ordnet par (f,g) av kontinuerlige funksjoner hver definert på det samme intervallet I.

Ligningene

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad t \in I$$

kalles for parametriske ligninger til kurven C.
Den uavhengige variabelen t kalles parameteren.

Plan kurve - Parameterisering av en plan kurve

En plan kurve C i planet er en mengde av punkter (x,y) i planet slik at
x = f(t) and y = g(t) for en t i et intervall I
hvor f og g er kontinurlige funksjoner definert på I.
Ethvert slik intervall og par (f,g) av funksjoner som genererer punktene på C kalles en parameterisering av C.

En plan kurve involverer ingen spesifikk parameterisering og kurven har ingen spesifikk retning.

Kurver i planet
Flere mulige parameteriseringer

Rett linjestykke

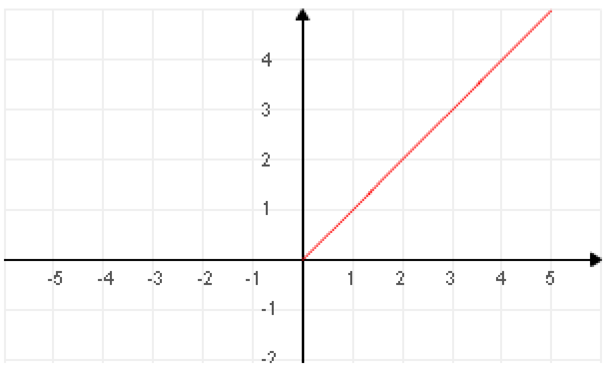
$y = x \qquad x \in [0,5]$

$x = t \qquad y = t \qquad t \in [0,5]$

$x = 2t \qquad y = 2t \qquad t \in [0,2.5]$

$x = \pi t \qquad y = \pi t \qquad t \in \left[0, 5/\pi\right]$

$x = 5 - t \qquad y = 5 - t \qquad t \in [0,5]$ **Skifte av retning**



Sirkel

$x^2 + y^2 = 1$

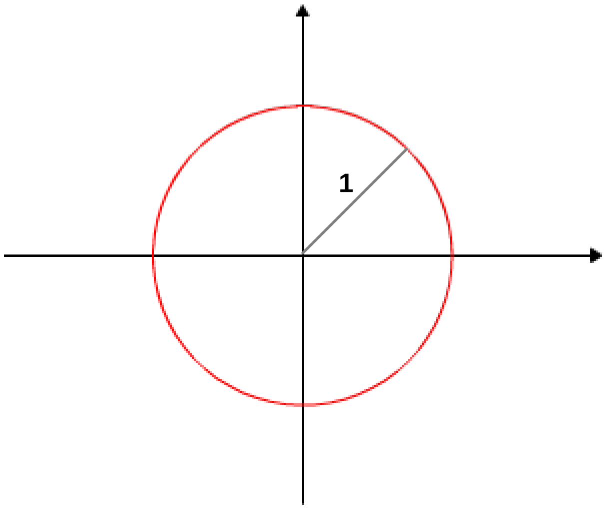
$x = \cos t \qquad y = \sin t \qquad t \in [0,2\pi]$

$x = \cos 2t \qquad y = \sin 2t \qquad t \in [0,\pi]$

$x = \sin t^2 \qquad y = \cos t^2 \qquad t \in \left[0, \sqrt{2\pi}\right]$

$x = \cos(\pi u + \varphi) \qquad y = \sin(\pi u + \varphi) \qquad u \in [-1,1]$

$x = 1 - t^2 \qquad y = t\sqrt{2 - t^2} \qquad t \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$



Kurver i planet

Parameterisering av en kurve som er grafen til en funksjon

f er en kontinuerlig funksjon på et intervall I.
Grafen til f er en plan kurve.

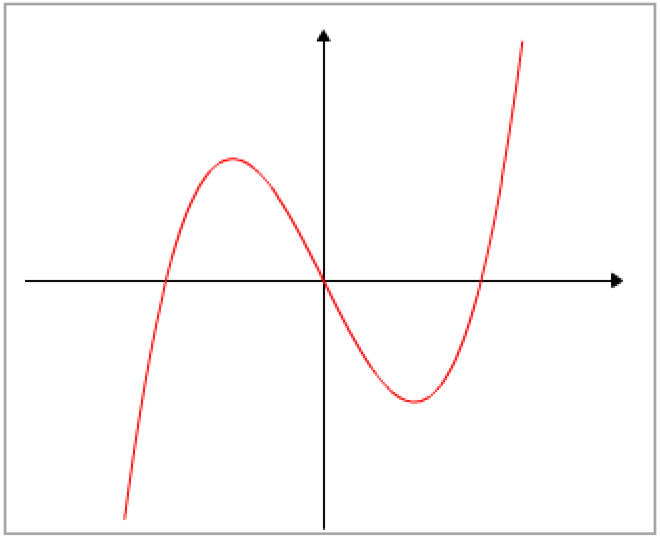
En mulig parameterisering er da gitt ved:

$$x = t \qquad y = f(t) \qquad t \in I$$

Eks:

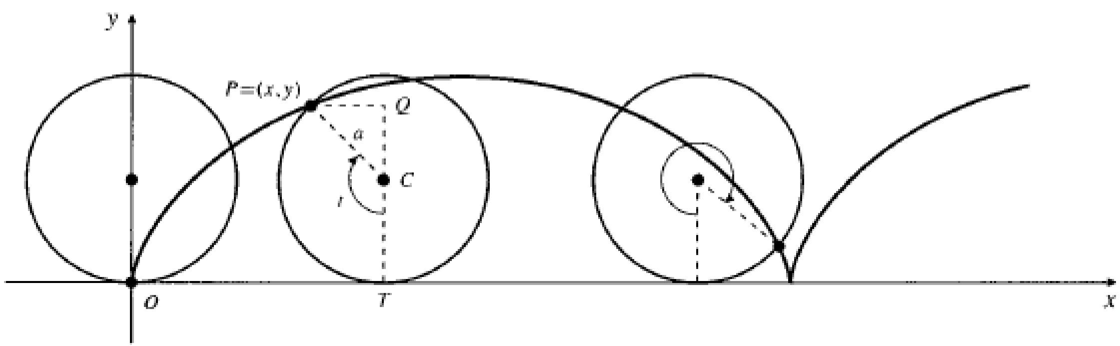
$$y = f(x) = 0.2x^3 - 2x \qquad x \in I = [-4,4]$$

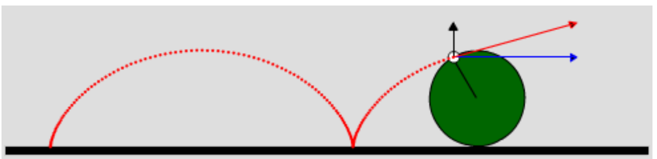
$$x = t \qquad y = f(t) = 0.2t^3 - 2t \qquad t \in I = [-4,4]$$



Cycloide

Rullende hjul som ruller uten å gli mot underlaget





$$x = OT - PQ = at - a\sin(\pi - t) = at - a\sin t = a(t - \sin t)$$

$$y = TC + CQ = a + a\cos(\pi - t) = a - a\cos t = a(1 - \cos t)$$

Derivasjon viser at et periferipunkt i kontakt med underlaget har null hastighet og at et periferipunkt på toppen har dobbelt så stor hastighet som hjulsenteret.

Merk: Til tross for at både x og y er deriverbare funksjoner overalt, er ikke kurven det vi kaller en 'glatt kurve'.

Involusjon

En stram snor vikles av en fast sirkel

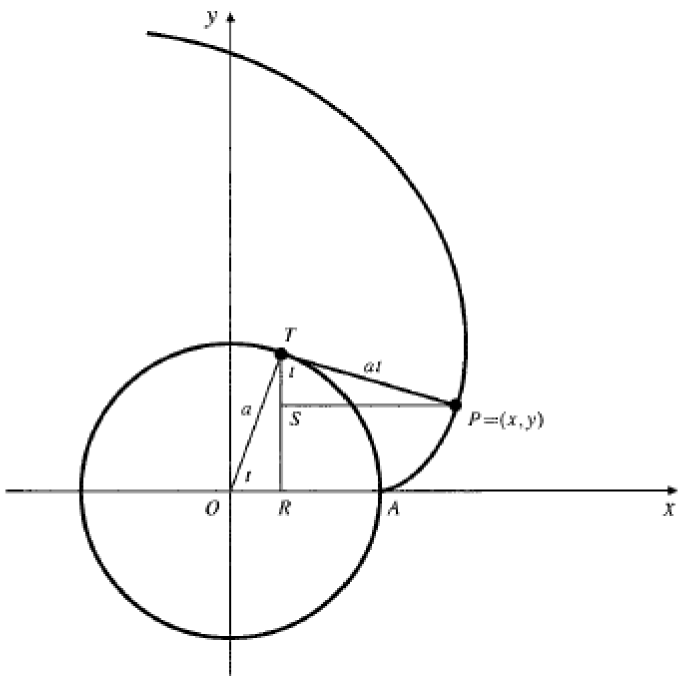
**En snor er viklet (nesten som helhet) rundt en fast sirkel.
Den delen av snoren (TP) som ikke er viklet rundt sirkelen
er strukket ut til en rett linje tangentielt til sirkelen.
Kurven som snorenden P følger når snoren vikles av sirkelen
kalles for 'involusjonen av sirkelen'.**

Sirkel: $x^2 + y^2 = a^2$

Parameterisering av involusjonskurven til sirkelen

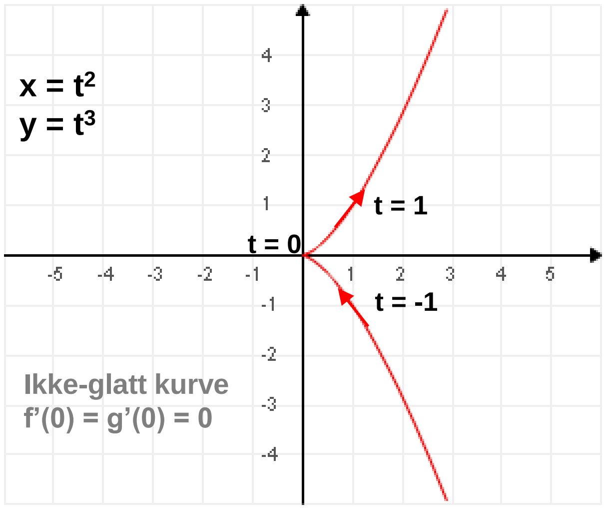
$$x = OR + SP$$
$$= a\cos t + at\sin t$$
$$= a(\cos t + t\sin t)$$

$$y = RT - ST$$
$$= a\sin t - at\cos t$$
$$= a(\sin t - t\cos t)$$



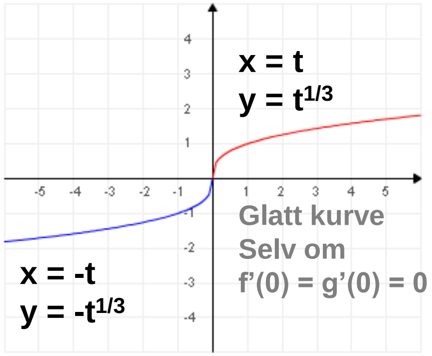
Glatte parameteriserte kurver
Def

Vi sier at en plan kurve er glatt
når kurven har en tangent linje i hvert punkt P
og denne tangentlinjen endrer seg på en kontinuerlig måte
når P beveger seg på kurven
(dvs tangentvinkelen er en kontinerlig funksjon av posisjonen P).



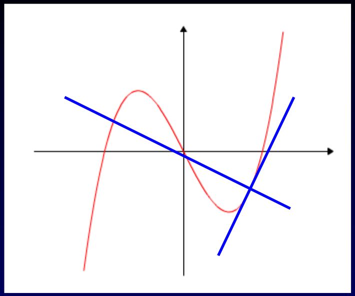
En kurve C som er grafen til en kontinuerlig deriverbar funksjon f
vil være en glatt kurve.

For parametriske kurver $x = f(t)$, $y = g(t)$
er situasjonen noe mer komplisert.
En slik kurve trenger ikke være glatt
selv om begge funksjonen f og g er kontinuerlig deriverbare.
Spesiell oppmerksomhet rettes mot punkter hvor $f'(t) = g'(t) = 0$.
En partikkel som beveger seg på en slik kurve hvor t er tiden,
vil ha null hastighet når $f'(t) = g'(t) = 0$,
og partikkelen vil ikke nødvendigvis bevege seg slik at
Inngående og utgående retning er like.



Glatte parameteriserte kurver

Tilstrekkelig betingelse



Teorem:

La C cære en parameterisert kurve   x = f(t),   y = g(t)
hvor f'(t) og g'(t) er kontinuerlige på et intervall I.
Hvis f'(t) ≠ 0, så er kurven C glatt
og har for hver t en tangentlinje med stigning:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

C er således glatt i punkter unntatt muligens i punkter hvor f'(t) og g'(t) begge er lik null.

Bevis:

Anta at f'(t) ≠ 0 på I.
Da er f enten sterkt stigende eller sterkt synkende på I
og således en en-til-en-funksjon og derfor invertibel.
Punktet på C som svarer til gitt t er gitt ved: y = g(t) = g(f^{-1}(x)).
Herav får vi at stigningen er gitt ved:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(g\left(f^{-1}(x)\right)\right) \\
&= g'\left(f^{-1}(x)\right)\frac{d}{dx}\left(f^{-1}(x)\right) \\
&= \frac{g'\left(f^{-1}(x)\right)}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \\
&= \frac{g'(t)}{f'(t)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(g(t)) \\
&= \frac{d}{dt}(g(t))\frac{dt}{dx} \\
&= g'(t)\frac{1}{\frac{dx}{dt}} \\
&= g'(t)\frac{1}{\frac{d}{dt}(f(t))} \\
&= g'(t)\frac{1}{f'(t)} \\
&= \frac{g'(t)}{f'(t)}
\end{aligned}$$

Denne stigningen er en kontinuerlig funksjon av t, slik at tangenten til C endres kontinuerlig for t i I.

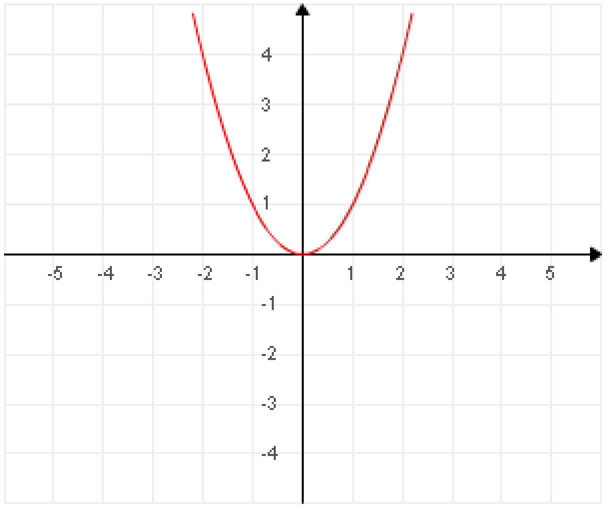
Beviset for g'(t) ≠ 0 er analogt.
I dette tilfellet er stigningen til normalen
en kontinuerlig funksjon, dvs normalen
endres kontinuerlig med t.
Derfor endres tangenten også kontinuerlig.

Glatte parameteriserte kurver

Tilstrekkelig betingelse - Eks

$x = t^3$ $y = t^6$

Kurven er parablen $y = x^2$
Denne kurven er glatt overalt
selv om $dx/dt = 3t^2$ og $dy/dt = 6t^5$ begge er lik null for t = 0.



$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{g'(t)}{f'(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{6t^5}{3t^2} = \lim_{t \to 0} 2t^3 = 0$$

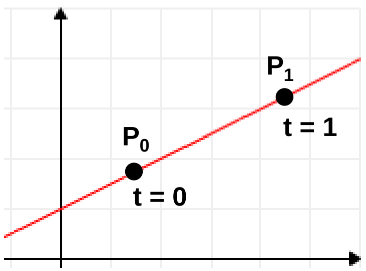
Tangent og normal til parameterisert kurve

Rett linje

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0) \qquad t \in \langle -\infty, \infty \rangle$$
$$y = y_0 + t(y_1 - y_0)$$

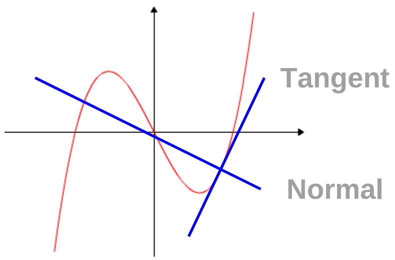
StIgningstall

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \text{konstant}$$



Parameterisert kurve

$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$



Tangent i (x_0,y_0)

$$x = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$$
$$y = g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0)$$

Går gjennom $(x_0,y_0) = (f(t_0),g(t_0))$
og har korrekt stigning $dy / dx = (y(t)-y(t_0)) / (x(t)-x(t_0)) = g'(t_0) / f'(t_0))$

Normal i (x_0,y_0)

$$x = f(t_0) + g'(t_0)(t - t_0)$$
$$y = g(t_0) - f'(t_0)(t - t_0)$$

Går gjennom $(x_0,y_0) = (f(t_0),g(t_0))$
og har korrekt stigning normalt på tangenten
siden produktet av stigningen til tangenten og normalen er lik -1
$[g'(t_0) / f'(t_0))] / [-f'(t_0) / g'(t_0))] = -1$

Tangent / normal
Eks

Tangent i (x_0,y_0)

$$x = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0)$$
$$y = g(t_0) + g'(t_0)(t-t_0)$$

Normal i (x_0,y_0)

$$x = f(t_0) + g'(t_0)(t-t_0)$$
$$y = g(t_0) - f'(t_0)(t-t_0)$$

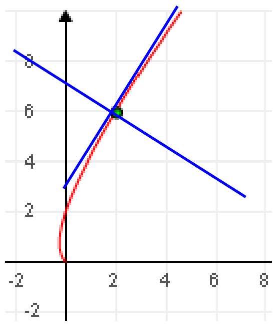
Bestem ligning for tangent og normal i punktet svarende til t = 2 til følgende parameteriserte kurve:

$$x = t^2 - t$$
$$y = t^2 + t$$

$$f(t) = t^2 - t \qquad f(2) = 2^2 - 2 = 2$$
$$g(t) = t^2 + t \qquad g(2) = 2^2 + 2 = 6$$
$$f'(t) = \frac{dx}{dt} = 2t - 1 \qquad f'(2) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=2} = 2\cdot 2 - 1 = 3$$
$$g'(t) = \frac{dy}{dt} = 2t + 1 \qquad g'(2) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2} = 2\cdot 2 + 1 = 5$$

$Tangent:$

$$x = f(2) + f'(2)(t-2) = 2 + 3(t-2) = \underline{3t-4}$$
$$y = g(2) + g'(2)(t-2) = 6 + 5(t-2) = \underline{5t-4}$$



$Normal:$

$$x = f(2) + g'(2)(t-2) = 2 + 5(t-2) = \underline{5t-8}$$
$$y = g(2) - f'(2)(t-2) = 6 - 3(t-2) = \underline{-3t+12}$$

Krumning
Def

Tangent i (x_0,y_0)

$$x = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0)$$
$$y = g(t_0) + g'(t_0)(t-t_0)$$

Normal i (x_0,y_0)

$$x = f(t_0) + g'(t_0)(t-t_0)$$
$$y = g(t_0) - f'(t_0)(t-t_0)$$

Krumningen til en parameterisert kurve kan bestemmes ved å beregne den andre deriverte av y mht x fra de parametriske ligningene.

$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$
$$= \frac{d}{dt}\left(g'\frac{1}{f'}\right)\frac{1}{f'}$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{g'}{f'}\right)\frac{1}{f'}$$
$$= \frac{f'g''-g'f''}{f'^2}\frac{1}{f'}$$
$$= \frac{f'g''-g'f''}{f'^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f'g''-g'f''}{f'^3}$$

Kurve-skisse
Eks

	Tangent i (x_0,y_0)	Normal i (x_0,y_0)
$x = f(t)$ $y = g(t)$	$x = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0)$ $y = g(t_0) + g'(t_0)(t-t_0)$	$x = f(t_0) + g'(t_0)(t-t_0)$ $y = g(t_0) - f'(t_0)(t-t_0)$

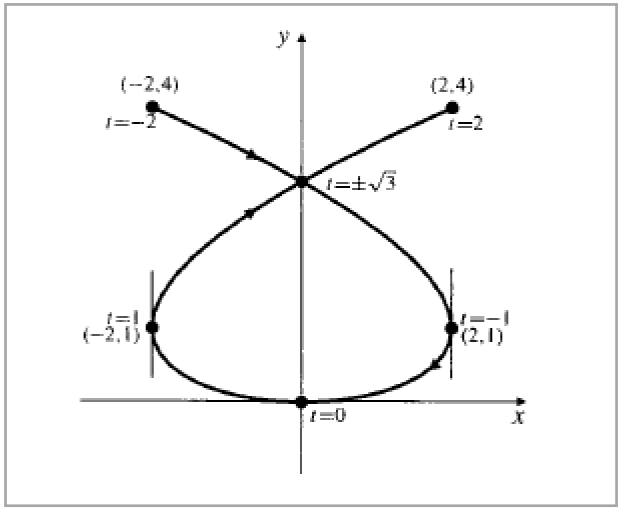
$$x = f(t) = t^3 - 3t \qquad t \in [-2,2]$$
$$y = g(t) = t^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f'g'' - g'f''}{f'^3}$$

$$f'(t) = 3(t^2 - 1) = 3(t-1)(t+1)$$
$$g'(t) = 2t$$

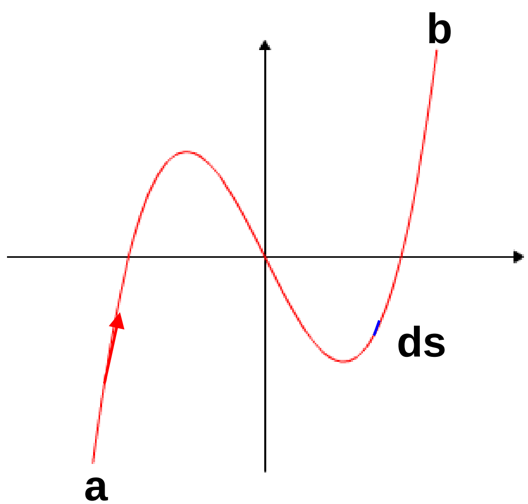
Kurven har en horisontal tangent for t = 0, dvs i punktet (0,0)
og vertikale tangenter for t = ±1, dvs i punktene (-2,1) og (2,1).
Retningsinformasjon mellom disse punktene
er oppsummert i skjemaet nedenfor.
Kurven er konkav oppover for -1 < t < 1, ellers konkav nedover.

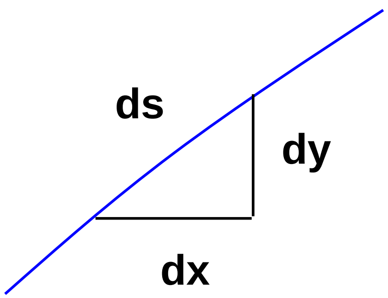
t	-2		-1		0		1		2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$g'(t)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x		→	·	←	←	←	·	→	
y		↓	↓	↓	·	↑	↑	↑	
curve		↘	↓	↙	←	↖	↑	↗	



Kurve-lengde
Def

$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$



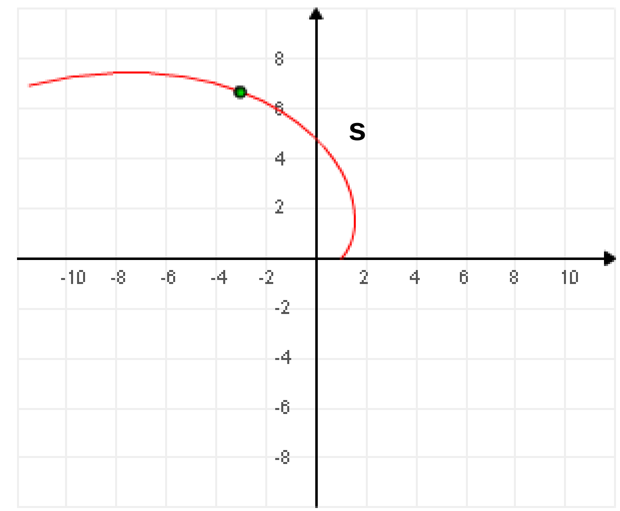


$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \frac{ds}{dt}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Kurve-lengde
Eks

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \frac{ds}{dt}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$x = e^t \cos t \qquad t \in [0,2]$$
$$y = e^t \sin t$$



$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t)$$

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \frac{ds}{dt}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{\left(e^t(\cos t - \sin t)\right)^2 + \left(e^t(\sin t + \cos t)\right)^2}\,dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{2e^{2t}}\,dt = \sqrt{2}\int_{t=0}^{t=2} e^t\,dt = \sqrt{2}\left[e^t\right]_{t=0}^{t=2} = \underline{\underline{\sqrt{2}(e^2 - 1)}}$$

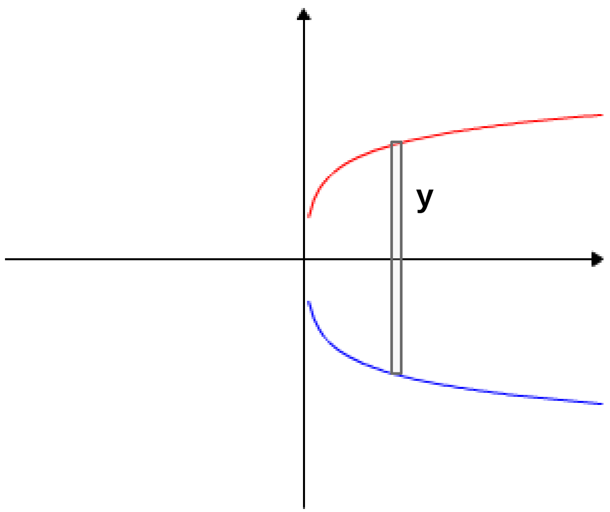
Rotasjonsflate

Def

$$x = f(t) \qquad t \in [a,b]$$
$$y = g(t)$$

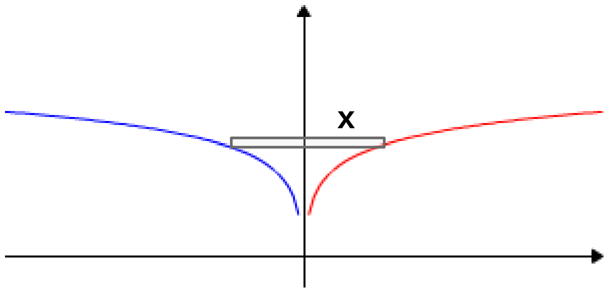
Rotasjon om x-aksen

$$S_x = 2\pi \int_a^b |y| ds = 2\pi \int_a^b |y| \frac{ds}{dt} dt = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$



Rotasjon om y-aksen

$$S_y = 2\pi \int_a^b |x| ds = 2\pi \int_a^b |x| \frac{ds}{dt} dt = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$



Rotasjonsflate

Eks – Astroidekurve

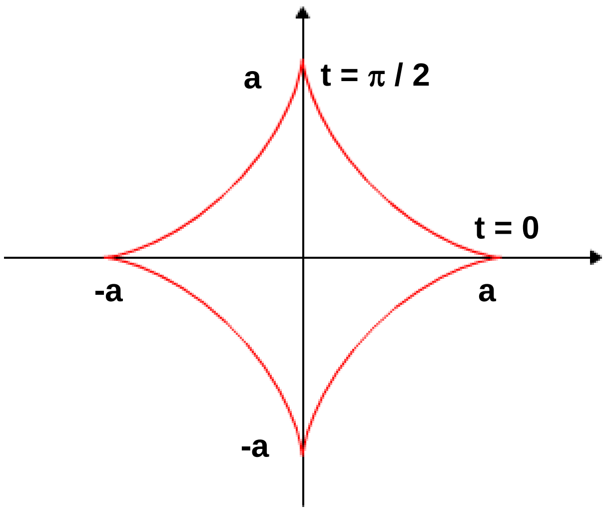
$$S_x = 2\pi\int_a^b |y|ds = 2\pi\int_a^b |y|\frac{ds}{dt}dt = 2\pi\int_a^b |y|\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$x = a\cos^3 t \qquad a > 0$$

$$y = a\sin^3 t$$

$$\frac{dx}{dt} = -3\cos^2 t\cdot \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3\sin^2 t\cdot \cos t$$



$$S_x = 2\cdot 2\pi\int_a^b |y|ds = 2\pi\int_a^b |y|\frac{ds}{dt}dt = \int_a^b |y|\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= 2\cdot 2\pi\int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \left|3a\sin^2 t\cdot\cos t\right|\sqrt{\left(-3a\cos^2 t\cdot\sin t\right)^2 + \left(3a\sin^2 t\cdot\cos t\right)^2}\,dt$$

$$= 2\cdot 2\pi\int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} 3a\sin^2 t\cdot\cos t\cdot 3a\cos t\cdot\sin t\,dt$$

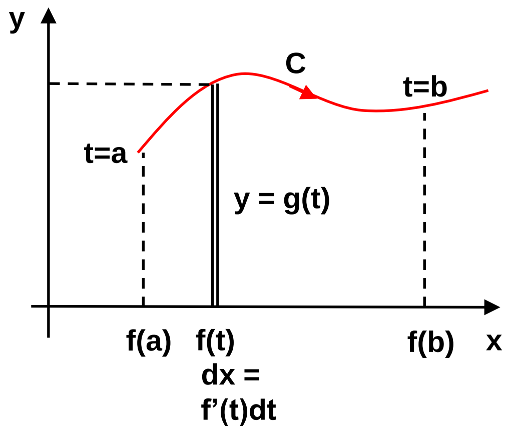
$$= 12\pi a^2\int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cdot\cos t\,dt = 12\pi a^2\left[\frac{1}{5}\sin^5 t\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\frac{12\pi a^2}{5}}}$$

Areal begrenset av parametriske kurver

Def - [1/5]

$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$

$$f'(t) \geq 0 \quad \wedge \quad g(t) \geq 0 \qquad \text{på } [a,b]$$
$$\Downarrow$$
$$A = \int_a^b dA = \int_a^b y\,dx = \int_a^b g(t)\,f'(t)\,dt$$



$$f'(t) \geq 0 \quad \wedge \quad g(t) \geq 0 \qquad \text{på } [a,b] \qquad A = \int_a^b g(t)\,f'(t)\,dt$$

$$f'(t) \geq 0 \quad \wedge \quad g(t) \leq 0 \qquad \text{på } [a,b] \qquad A = -\int_a^b g(t)\,f'(t)\,dt$$

$$f'(t) \leq 0 \quad \wedge \quad g(t) \geq 0 \qquad \text{på } [a,b] \qquad A = -\int_a^b g(t)\,f'(t)\,dt$$

$$f'(t) \leq 0 \quad \wedge \quad g(t) \leq 0 \qquad \text{på } [a,b] \qquad A = \int_a^b g(t)\,f'(t)\,dt$$

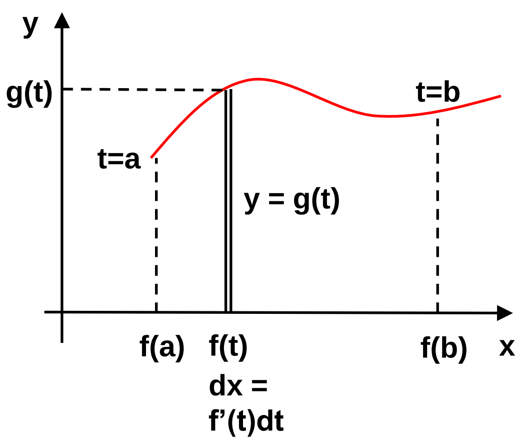
$$\int_a^b g(t)\,f'(t)\,dt = A_1 - A_2$$

A_1 er arealet liggende vertikalt mellom C og den delen av x-aksen x = f(t) slik at g(t)f'(t) ≥ 0
A_2 er arealet liggende vertikalt mellom C og den delen av x-aksen x = f(t) slik at g(t)f'(t)<0

Areal begrenset av parametriske kurver

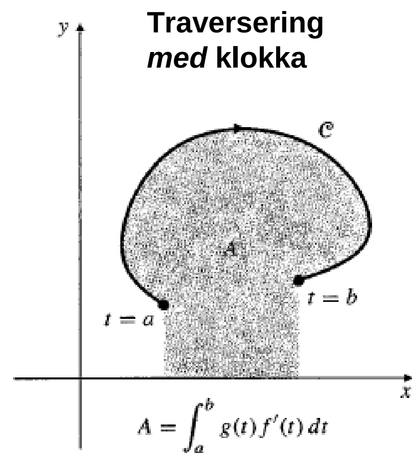
Def - [2/5]

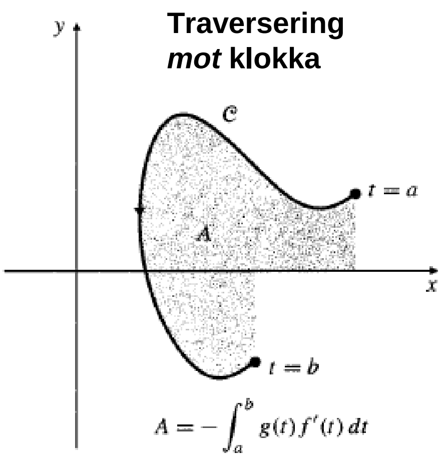
$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$

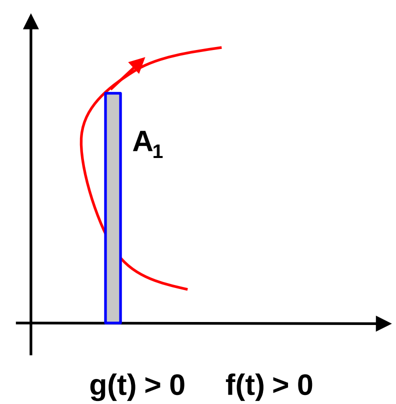


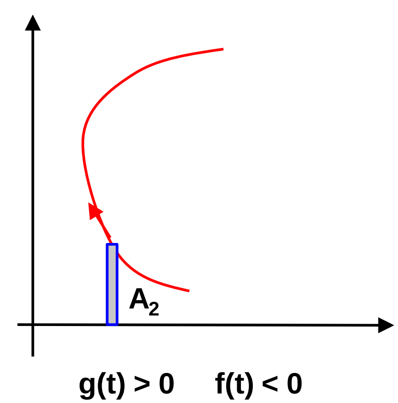
$$\int_a^b g(t)\, f'(t)dt = A_1 - A_2$$

A_1 er arealet liggende vertikalt mellom C og den delen av x-aksen x = f(t) slik at g(t)f'(t) ≥ 0
A_2 er arealet liggende vertikalt mellom C og den delen av x-aksen x = f(t) slik at g(t)f'(t)<0









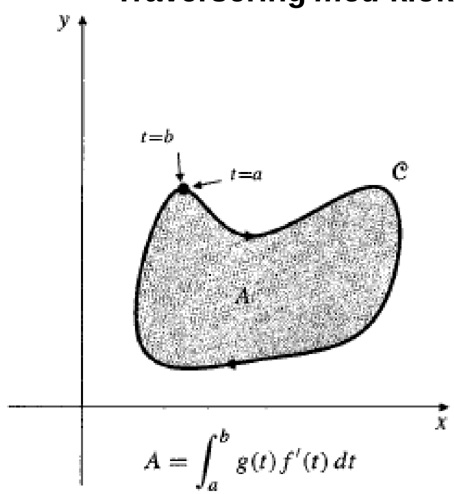
Areal begrenset av parametriske kurver

Def - [3/5] - Lukket kurve

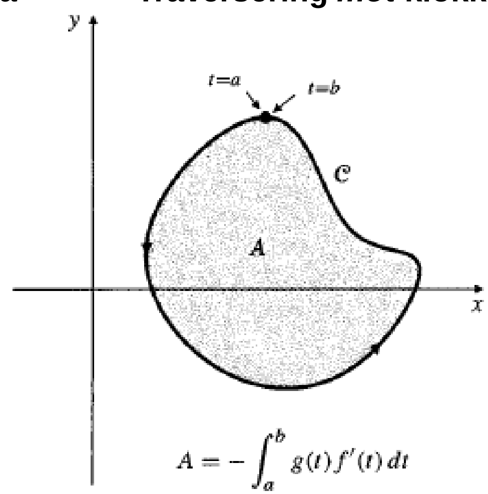
$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$

Lukket, non-self-intersecting kurve

Traversering *med* klokka



Traversering *mot* klokka

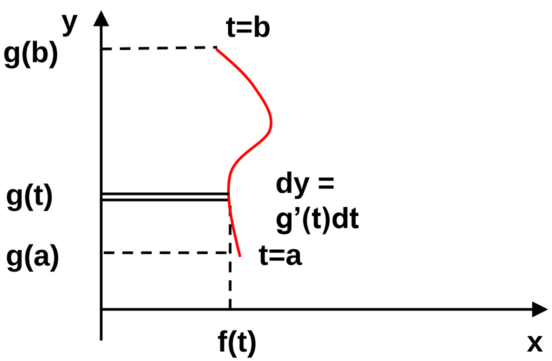


$$A = \int_a^b g(t) f'(t) dt$$

$$A = -\int_a^b g(t) f'(t) dt$$

Areal begrenset av parametriske kurver
Def - [4/5]

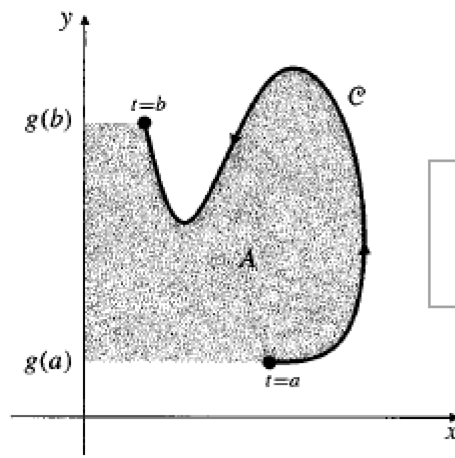
$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$



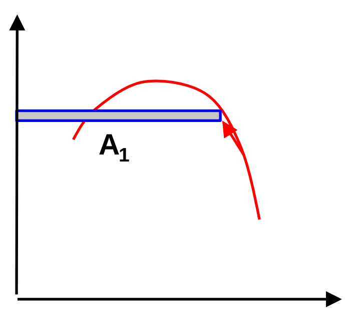
$$\int_a^b x\,dy = \int_a^b f(t)g'(t)dt = A_1 - A_2$$

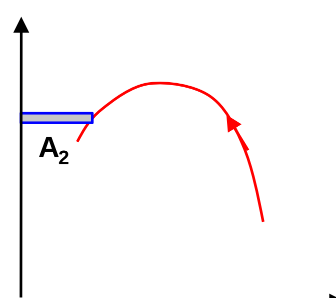
A_1 er arealet liggende horisontalt mellom C og den delen av y-aksen y = g(t) slik at f(t)g't(t) ≥ 0
A_2 er arealet liggende horisontalt mellom C og den delen av y-aksen y = g(t) slik at f(t)g'(t)<0

Traversering
***mot* klokka**



$$A = \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$$





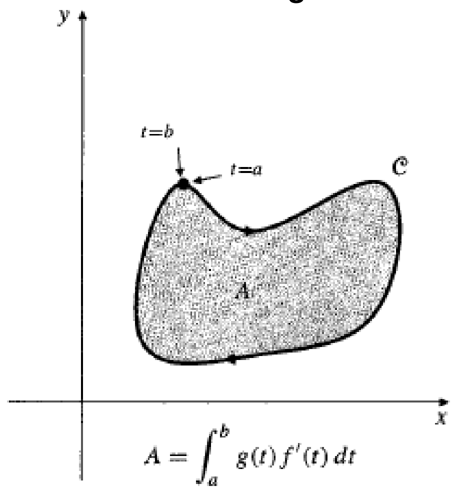
Areal begrenset av parametriske kurver

Def - [5/5] - Lukket kurve

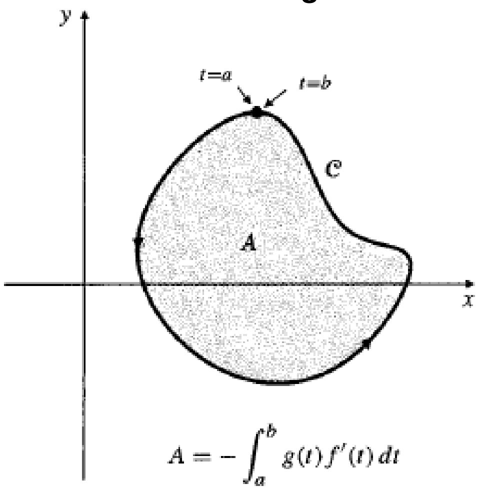
$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$

Lukket, non-self-intersecting kurve

Traversering *med* klokka



Traversering *mot* klokka



$$A = \int_a^b g(t) f'(t)dt$$

$$A = -\int_a^b f(t) g'(t)dt$$

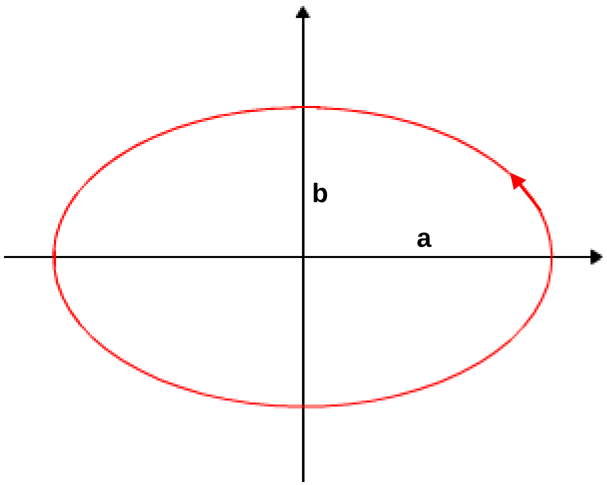
$$A = -\int_a^b g(t) f'(t)dt$$

$$A = \int_a^b f(t) g'(t)dt$$

Areal begrenset av parametriske kurver
Eks 1 - Ellipse

$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$

Bestem arealet avgrenset av ellipsen
x = acost y = bsint



Traversering *mot* klokka

$$A = -\int_a^b g(t) f'(t)dt$$

$$= -\int_{t=0}^{t=2\pi} b\sin t(-a\sin t)dt$$

$$= ab\int_{t=0}^{t=2\pi} \sin^2 t dt$$

$$= ab\int_{t=0}^{t=2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt$$

$$= \frac{ab}{2}\int_{t=0}^{t=2\pi} (1-\cos 2t)dt = \frac{ab}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \underline{\underline{\pi ab}}$$

Eller:

$$A = \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} a\cos t \cdot b\cos t)dt$$

$$= ab\int_{t=0}^{t=2\pi} \cos^2 t dt$$

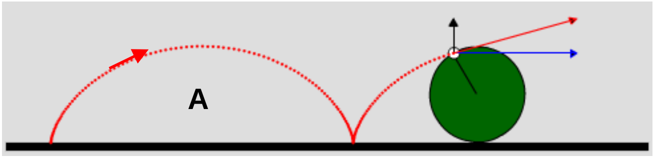
$$= ab\int_{t=0}^{t=2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt$$

$$= \frac{ab}{2}\int_{t=0}^{t=2\pi} (1+\cos 2t)dt = \frac{ab}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \underline{\underline{\pi ab}}$$

Areal begrenset av parametriske kurver
Eks 2 - Cycloide

$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$

Bestem arealet avgrenset x-aksen og en sykloide-bue
x = a(t-sint)   y = a(1-cost)



Traversering *med* klokka

$$A = \int_a^b g(t) f'(t)\,dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)\,dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,dt$$

$$= a^2 \int_{t=0}^{t=2\pi} (1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt$$

$$= a^2 \int_{t=0}^{t=2\pi} (1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2})\,dt$$

$$= a^2\left[t-2\sin t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \underline{\underline{3\pi a^2}}$$

END