1. a)

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{129.8}{10} = \underline{\underline{12.98}}$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i = \frac{119}{10} = \underline{\underline{11.9}}$$

b)

$$S_X = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{X})^2} = \underline{\underline{1.498}}$$

$$S_Y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{Y})^2} = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(y_i - \bar{Y})^2} = \underline{\underline{1.229}}$$

c)

$$H_0 : \bar{X} = \bar{Y}$$

$$H_1 : \bar{X} \neq \bar{Y}$$

Med antakelse om at begge fordelinge ne er normalford elte
og at standarada vvikene er ukjente, men teoret isk like, får vi :

$$S = \sqrt{\frac{1}{n_1 + n_2 - 2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{Y})^2\right]} = \underline{1.37}$$

Påstår H_1 dersom : $\left|\dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}\right| > t_{\alpha/2,m}$ hvor $m = n_1 + n_2 - 2$

$$\left|\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}\right| = \left|\frac{12.98 - 11.9}{1.37\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}}\right| = \underline{1.763}$$

$$t_{\alpha/2,m} = t_{0.025,18} = \underline{2.101}$$

Påstår ikke H_1, dvs med signifikan snivå på 5% kan vi ikke påstå at de to mobiltelef ontypene har ulik talet id.

Med antakelse om at begge fordelinge ne er normalford elte,
men hvor vi ikke kan anta at de ukjente standardav vikene teoretisk er like får vi følgende :

Påstår H_1 dersom : $\left| \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_X^{\ 2}}{n_1} + \dfrac{S_Y^{\ 2}}{n_2}}} \right| > t_{\alpha/2,\nu}$

hvor $\nu = \dfrac{(1+W)^2}{\dfrac{W^2}{n_1 - 1} + \dfrac{1}{n_2 - 1}}$ $\qquad W = \dfrac{S_X^{\ 2}/n_1}{S_Y^{\ 2}/n_2}$

Uten antakelse om at begge fordelinge ne er normalford elte, må vi ha en så stor sampling (n_1 og n_2 begge av størrelses orden 25 - 30 eller mer) at vi kan benytte oss av sentralgre nseteoreme t.
I så fall ville vi fått følgende :

Påstår H_1 dersom : $\left| \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_X^{\ 2}}{n_1} + \dfrac{S_Y^{\ 2}}{n_2}}} \right| > u_{\alpha/2}$

2.

H = Helbredes
B = Bivirkning

$P(H) = 0.70$
$P(B \mid H) = 0.25$
$P(B \mid \overline{H}) = 0.1$

a)

$$P(\overline{B} \mid H) = \frac{P(\overline{B} \cap H)}{P(H)} = \frac{P(H \cap \overline{B})}{P(H)}$$

$$P(H \cap \overline{B}) = P(H)P(\overline{B} \mid H) = P(H)(1 - P(B1H) = 0.70 \cdot (1 - 0.25) = \underline{\underline{0.525}}$$

b)

$$P(B) = P(B \mid H)P(H) + P(B \mid \overline{H})P(\overline{H})$$

$$= P(B \mid H)P(H) + P(B \mid \overline{H})(1 - P(H)) = 0.25 \cdot 0.70 + 0.1 \cdot (1 - 0.70) = \underline{\underline{0.205}}$$

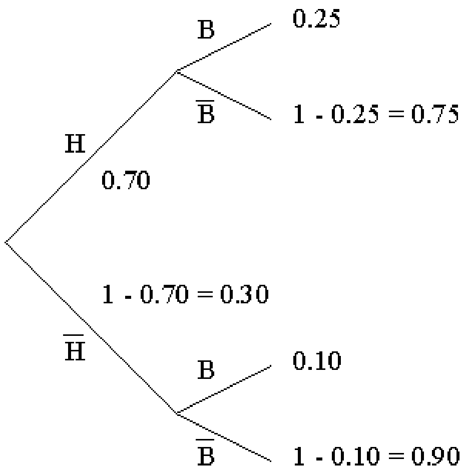
c)

$$P(H \mid \overline{B}) = \frac{P(H)}{P(\overline{B})} P(\overline{B} \mid H) = \frac{P(H)}{1 - P(B)}(1 - P(B \mid H)) = \frac{0.70}{1 - 0.205} \cdot (1 - 0.25) = \underline{\underline{0.660}}$$

Eller :

$$P(H \mid \overline{B}) = \frac{P(H \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(H \cap \overline{B})}{1 - P(B)} = \frac{0.525}{1 - 0.205} = \underline{\underline{0.660}}$$

Eller vi kan løse oppgavene a, b og c ved å benytte oss av følgende sannsynlighetstre:



a) $P(H \cap \overline{B}) = 0.70 \cdot 0.75 = \underline{\underline{0.525}}$

b) $P(B) = 0.70 \cdot 0.25 + 0.30 \cdot 0.1 = \underline{\underline{0.205}}$

c) $P(H \mid \overline{B}) = \dfrac{0.525}{0.525 + 0.30 \cdot 0.90} = \underline{\underline{0.660}}$

3. a)

$$P(X > 8500) = 1 - P(X \le 8500) = 1 - G\left(\frac{8500 - 8000}{500}\right) = 1 - G(1) = 1 - 0.8413 = \underline{\underline{0.1587}}$$

b)

$$P(X \le k) = 0.95$$

$$G\left(\frac{k - 8000}{500}\right) = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \frac{k - 8000}{500} = 1.645 \quad \Rightarrow \quad k = \underline{\underline{8825}}$$

c)

$$Y = \sum_{i=1}^{4} X_i \sim N(4\mu, 4\sigma^2) = N(32000, 1000^2)$$

$$P(Y < 30000) = G\left(\frac{30000 - 32000}{1000}\right) = G(-2) = 1 - G(2) = 1 - 0.9772 = \underline{\underline{0.0228}}$$

Eller :

Spørsmålet i oppgaven kan omformuleres til følgende ekvivalente spørsmål :

Finn sannsynligheten for at det gjennomsnittlige salget pr uke

i løpet av 4 uker er mindre enn $\frac{30000}{4}$ liter $= 7500$ liter.

Ved å la Y_{GU} være gjennomsnittlig salg pr uke vil oppgaven kunne løses på følgende måte :

$$Y_{GU} \sim N(7500, \frac{\sigma^2}{4}) = N(7500, \frac{500^2}{4}) = N(7500, \left(\frac{500}{2}\right)^2) = N(7500, 250^2)$$

$$P(Y_{GU} < 7500) = G\left(\frac{7500 - 8000}{250}\right) = G(-2) = 1 - G(2) = 1 - 0.9772 = \underline{\underline{0.0228}}$$

d)

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 8000$$

$$H_1 : \mu < 8000$$

Påstår H_1 dersom : $\overline{X} < k = \mu_0 - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\overline{X} = 7800$$

$$k = \mu_0 - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu_0 - u_{0.05} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 8000 - 1.645 \cdot \frac{500}{\sqrt{9}} \approx 8000 - 1.645166.7 = 7726$$

Påstår ikke H_1, dvs med 5% signifikansnivå kan vi ikke påstå at det ukentlige salget er lavere enn 8000 liter.

4. a) Estimert regresjonslinje:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t$$

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{1}{11}\cdot 66 = 6.0$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{11}\cdot 161.3 = 14.664$$

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})Y_i = -40.50$$

$$M = \sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2 = 110$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})Y_i = \frac{1}{110}\cdot(-40.50) = -0.368$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{t} = 14.664 - (-0.368)\cdot 6.0 = 16.872$$

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t = \underline{\underline{16.872 - 0.368t}}$$

b)

$$H_0 : \beta_1 = 0$$
$$H_1 : \beta_1 < 0$$

Påstår H hvis $\hat{\beta}_1 < k$ hvor $\hat{\beta} =$ - 0.368 og hvor k er gitt ved :

$$k = \beta_1 - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{M}} = 0 - 1.282\frac{1.5}{\sqrt{110}} = -0.183$$

Påstår H_1, dvs med signifikan snivå på 10% kan vi påstå at den nye rensemetod en ser ut til å kunne redusere giftkonsen trasjonen i sjøen.

5.

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kp(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \qquad 1-p = q$$

$$= (1-q)\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k} = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} - \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)q^{k-1}$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} kq^{k-1} - \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)q^{k-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$$

$$= 1 + \frac{q}{1-q} = \frac{1}{1-q} = \underline{\underline{\frac{1}{p}}}$$

Eller:

Tar utgangspun kt i følgende konvergent e geometrisk e rekke :

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x} \qquad |x| < 1$$

Derivasjon gir :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dS}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \\ \frac{dS}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Siden p i vår oppgave er sannsynlig heten for treff i et enkeltfors øk, har vi $0 \le p \le 1$.

Med $p = 1$ vil opplagt første treff inntreffe allerede i første enkeltfors øk.

Herav følger at $E(X) = 1$ hvilket stemmer overrens med formelen $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{1} = 1$.

Med $p < 1$ (og fortsatt $0 \le p$) vil p oppfylle betingelse n $|p| < 1$.

p oppfyller derfor betingelse n $|p| < 1$ og vi kan i formelen ovenfor erstatte x med 1 - p.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p^2}$$

Multiplika sjon av begge sider med p gir :

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p} \qquad \text{og det var dette vi skulle vise.}$$